

Contrôle : chapitre 8, Géométrie repérée

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Droites remarquables d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$ et $C(3; 1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) . (1,5 points)
2. Déterminer une équation de la hauteur (d) issue de C dans le triangle ABC . (1,5 points)
3. Calculer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de C . (1 point)
4. Calculer l'aire du triangle ABC . (1 point)
5. Déterminer une équation de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) ; le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, est donc un vecteur normal (on vérifie : $6 \times 1 + 3 \times (-2) = 0$).

Une équation de (AB) est de la forme $x - 2y + c = 0$. Comme $A \in (AB)$: $-2 - 2 \times 1 + c = 0$, donc $c = 4$.

Vérification avec B : $4 - 2 \times 4 + 4 = 0$.

$(AB) : x - 2y + 4 = 0$.

Barème : 0,5 point pour un vecteur directeur ou normal correct ; 0,5 point pour le calcul de c ; 0,5 point pour l'équation finale (et sa vérification).

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

La hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à (AB) . Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc normal à (d) , de même que $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui lui est colinéaire.

Une équation de (d) est de la forme $2x + y + c = 0$. Comme $C \in (d) : 2 \times 3 + 1 + c = 0$, donc $c = -7$.

$$(d) : 2x + y - 7 = 0.$$

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{AB}$ (ou un colinéaire) est normal à (d) ; 0,5 point pour le calcul de c avec C ; 0,5 point pour l'équation.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

H est le point d'intersection de (AB) et de (d) : ses coordonnées vérifient
$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}.$$

La seconde équation donne $y = 7 - 2x$. En remplaçant : $x - 2(7 - 2x) + 4 = 0$, soit $5x - 10 = 0$, donc $x = 2$ et $y = 3$.

$$H(2; 3).$$

Vérification : $2 - 2 \times 3 + 4 = 0$ et $2 \times 2 + 3 - 7 = 0$.

Barème : 0,5 point pour la résolution du système ; 0,5 point pour les coordonnées de H .

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1 point)

$$CH = \sqrt{(2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \text{ et } AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$(CH) \text{ est la hauteur issue de } C : \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{15}{2}.$$

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{15}{2} = 7,5$ unités d'aire.

Barème : 0,5 point pour CH et AB ; 0,5 point pour l'aire.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1 point)

La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu $I\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+4}{2}\right) = \left(1; \frac{5}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{AB}$ (ou $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$) pour vecteur normal.

$$\text{Pour } M(x; y) : \overrightarrow{IM} \cdot \vec{n}' = 0 \iff 2(x-1) + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \iff 2x + y - \frac{9}{2} = 0.$$

$$(\Delta) : 4x + 2y - 9 = 0.$$

Barème : 0,5 point pour le milieu I et le vecteur normal ; 0,5 point pour l'équation.

Exercice 2 (7 points) : Un cercle, une tangente et un diamètre

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère l'ensemble Γ des points $M(x; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ et la droite d d'équation $x - 2y + 2 = 0$.

1. Montrer que Γ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon. (1,5 points)
2. Vérifier que le point $A(5; 1)$ appartient à Γ . (0,5 point)
3. Déterminer une équation de la tangente T à Γ en A . (1,5 points)
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ et de d . On les note B et D , B étant celui d'abscisse la plus petite. (2 points)
5. Déterminer une équation du cercle Γ' de diamètre $[BD]$, puis son centre et son rayon. (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1,5 points)

On met l'équation sous forme canonique : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ et $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \iff (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Γ est le cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon 5 (car $25 > 0$).

Barème : 0,5 point pour x : carré complété ; 0,5 point pour y : carré complété et forme $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$; 0,5 point pour centre, rayon ($r^2 = 25 > 0$).

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (0,5 point)

$$(5 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 9 + 16 = 25 : \text{les coordonnées de } A \text{ vérifient l'équation, donc } A \in \Gamma.$$

Barème : 0,5 point pour le calcul et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

La tangente en A est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$: $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T .

Pour $M(x; y) : M \in T \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0 \iff 3(x - 5) + 4(y - 1) = 0$.

$T : 3x + 4y - 19 = 0$.

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à T (tangente perpendiculaire au rayon) ; 0,5 point pour $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$ ou calcul de c ; 0,5 point pour l'équation.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (2 points)

Les coordonnées d'un point d'intersection vérifient $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ et $x = 2y - 2$.

On substitue : $(2y - 2)^2 + y^2 - 4(2y - 2) + 6y - 12 = 0 \iff 4y^2 - 8y + 4 + y^2 - 8y + 8 + 6y - 12 = 0 \iff 5y^2 - 10y = 0 \iff 5y(y - 2) = 0$.

Donc $y = 0$ (alors $x = -2$) ou $y = 2$ (alors $x = 2$).

$B(-2; 0)$ et $D(2; 2)$.

Vérification : $(-2)^2 + 0 - 4 \times (-2) + 0 - 12 = 0$ et $2^2 + 2^2 - 4 \times 2 + 6 \times 2 - 12 = 0$.

Barème : 0,5 point pour la substitution ; 0,5 point pour l'équation du second degré en y ; 0,5 point pour les deux valeurs de y ; 0,5 point pour les deux points.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1,5 points)

$M \in \Gamma' \iff \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$, avec $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -2 - x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MD} \begin{pmatrix} 2 - x \\ 2 - y \end{pmatrix}$.

$(-2 - x)(2 - x) + (-y)(2 - y) = 0 \iff (x + 2)(x - 2) + y(y - 2) = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.

Forme canonique : $x^2 + (y - 1)^2 = 5$. Le centre est le milieu de $[BD]$: $(0; 1)$ et le rayon est $\frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$.

$\Gamma' : x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$, de centre $(0; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ avec les bonnes coordonnées ; 0,5 point pour l'équation développée ; 0,5 point pour centre et rayon.

Exercice 3 (7 points) : Couverture radio de deux balises

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 km. Deux balises sont placées en $A(0; 0)$ et $B(6; 0)$. Chacune a une portée de 5 km : la zone couverte par la balise A est le disque de centre A et de rayon 5, de frontière le cercle $\mathcal{C}_A$; de même pour B et $\mathcal{C}_B$.

On considère la fonction Python suivante, qui teste si un point de coordonnées $(x; y)$ est couvert par les deux balises à la fois :

```
def dans_zone(x, y):
    dA = x**2 + y**2
    dB = (x - 6)**2 + y**2
    return dA <= 25 and dB <= 25
```

1. Écrire une équation de $\mathcal{C}_A$ et une équation de $\mathcal{C}_B$. (0,5 point)
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection P et Q de $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$, avec $y_P > 0$. (2 points)
3. Démontrer que le quadrilatère $APBQ$ est un losange. (1,5 points)
4. Un navire, situé en un point $M(x; y)$, constate que sa distance à A est le double de sa distance à B . Montrer que M appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (2 points)
5. Un élève écrit en Python la fonction suivante (donnée ci-dessus). Sans l'exécuter, donner la valeur renvoyée par `dans_zone(3, 4)` puis par `dans_zone(0, 5)`, et interpréter chaque résultat pour un navire situé à ce point. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (0,5 point)

$$\mathcal{C}_A : x^2 + y^2 = 25 \text{ et } \mathcal{C}_B : (x - 6)^2 + y^2 = 25.$$

Barème : 0,5 point pour les deux équations.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Un point d'intersection vérifie les deux équations. En les soustrayant : $x^2 + y^2 - 25 - [(x - 6)^2 + y^2 - 25] = 0 \iff 12x - 36 = 0 \iff x = 3$.

En remplaçant dans $x^2 + y^2 = 25$: $y^2 = 16$, donc $y = 4$ ou $y = -4$.

$P(3; 4)$ et $Q(3; -4)$.

Barème : 1 point pour la soustraction et $x = 3$; 0,5 point pour $y^2 = 16$ et les deux valeurs ; 0,5 point pour P et Q identifiés.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

$\overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QB} \begin{pmatrix} 6-3 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QB}$: $APBQ$ est un parallélogramme.

De plus $AP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et $AQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$: deux côtés consécutifs sont de même longueur.

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux est un losange : $APBQ$ est un losange.

Barème : 0,5 point pour $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QB}$ et parallélogramme ; 0,5 point pour $AP = AQ$; 0,5 point pour la conclusion (propriété citée).

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2 points)

Les distances étant positives : $MA = 2MB \iff MA^2 = 4MB^2 \iff x^2 + y^2 = 4[(x-6)^2 + y^2]$.

$\iff x^2 + y^2 = 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 \iff 3x^2 + 3y^2 - 48x + 144 = 0 \iff x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$.

$\iff (x-8)^2 - 64 + y^2 + 48 = 0 \iff (x-8)^2 + y^2 = 16$.

M appartient au cercle de centre $(8; 0)$ et de rayon 4.

Barème : 0,5 point pour $MA^2 = 4MB^2$ (passage au carré justifié) ; 0,5 point pour le développement ; 0,5 point pour la forme canonique ; 0,5 point pour centre et rayon.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Pour $(3; 4)$: $x^2 + y^2 = 25 \leq 25$ et $(3-6)^2 + 4^2 = 25 \leq 25$. La fonction renvoie **True** : le navire est dans la zone couverte par les deux balises (sur la frontière des deux disques, c'est le

point P).

Pour $(0; 5)$: $0^2 + 5^2 = 25 \leq 25$ mais $(0 - 6)^2 + 5^2 = 61 > 25$. La fonction renvoie **False** : le navire est couvert par A mais pas par B , donc pas par les deux.

*Barème : 0,5 point pour **True** pour $(3,4)$, justifié et interprété ; 0,5 point pour **False** pour $(0,5)$, justifié et interprété.*

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20