

Produit scalaire : le cours

Quand pousse-t-on une caisse avec le plus d'efficacité : en poussant droit devant, ou de travers ? En physique, le **travail d'une force** se calcule avec un produit scalaire.

En maths, le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre** qui mesure à quel point deux vecteurs « vont dans la même direction ». Il sert à **calculer des angles**, à **prouver que deux droites sont perpendiculaires** et à **calculer des longueurs** dans un triangle.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge : **le produit scalaire est un nombre, pas un vecteur**. Il est nul si et seulement si les vecteurs sont **orthogonaux**.
- Retiens les **quatre façons de le calculer** : avec le projeté orthogonal, avec les normes et l'angle, avec les coordonnées, avec les normes seules. On choisit la plus pratique.

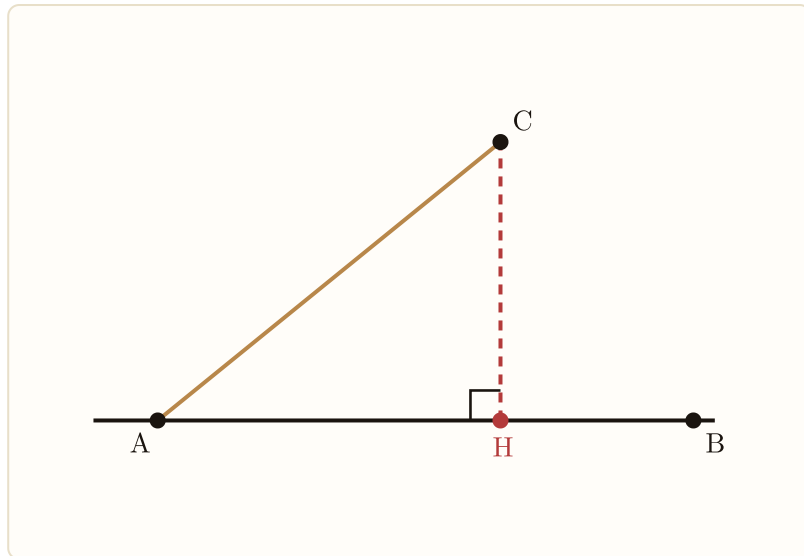
1. Produit scalaire : projection orthogonale et cosinus

Prends deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. On choisit des points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, avec $A \neq B$. On note H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) : c'est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C .

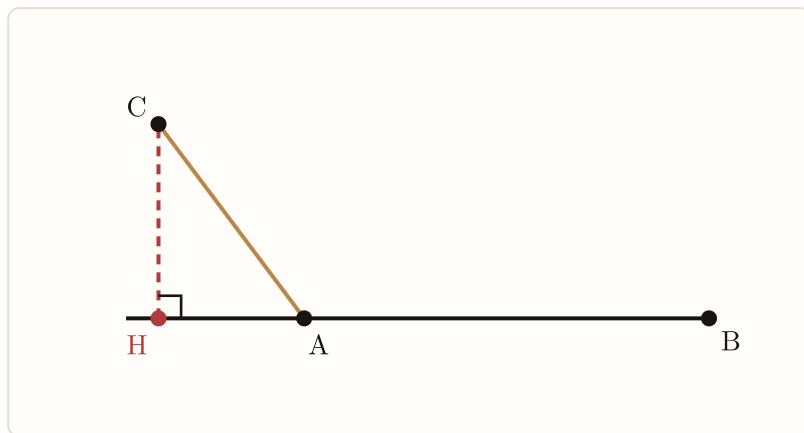
Définition (avec le projeté orthogonal). Le produit scalaire de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = +AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de **même sens** ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de **sens contraires** ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $H = A$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est aussi 0.

Ce nombre ne dépend pas du choix du point A : on l'admet.



Angle aigu : H est du même côté que B , donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = + AB \times AH$



Angle obtus : H est de l'autre côté de A , donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = - AB \times AH$

Exemple. $AB = 5$ et $AH = 2$. Si H est du même côté de A que B , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 = 10$. Si H est de l'autre côté de A , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$.

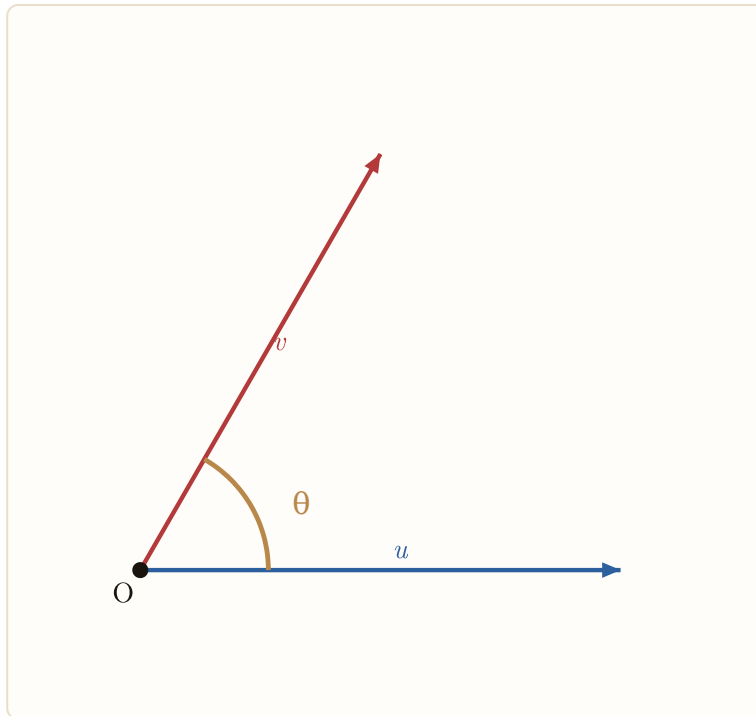
Propriété (avec le cosinus). Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non nuls et si $\theta = \widehat{BAC}$ est l'angle géométrique entre les deux vecteurs ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

Démonstration. Si θ est **aigu**, H est du même côté de A que B et, dans le triangle AHC rectangle en H , $AH = AC \cos \theta$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos \theta$.

Si θ est **obtus**, H est de l'autre côté de A et $AH = AC \cos(180^\circ - \theta) = -AC \cos \theta$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = AB \times AC \times \cos \theta$.

Si $\theta = 90^\circ$, alors $H = A$ et les deux membres valent 0 . $\square$

Deux vecteurs u et v et leur angle θ : $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$ **Cas particuliers.**

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de même sens** ($\theta = 0^\circ$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires de sens contraires** ($\theta = 180^\circ$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** ($\theta = 90^\circ$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Avec $\vec{v} = \vec{u}$: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$ (le **carré scalaire**).

Exemple. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\theta = 60^\circ$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$.

Propriété (caractérisation de l'orthogonalité). Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration. On convient que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur : c'est cohérent avec $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ avec $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \neq 0$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = 90^\circ$. $\square$

Pièges :

- Le produit scalaire est un **nombre** : n'écris jamais $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\dots ; \dots)$.
- Le **signe** : si l'angle est obtus, $\cos \theta < 0$ et le produit scalaire est **négatif**.
- Pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, l'angle à utiliser est $\widehat{BAC}$ (avec les deux vecteurs qui **partent du même point A**).

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et répondre par un vecteur, c'est répondre « oui » à la question « quelle heure est-il ? ».

2. Propriétés, normes et coordonnées

Propriétés. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- **bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- **carré scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

La symétrie se lit sur la formule avec le cosinus. La bilinéarité est admise : l'idée est que le projeté orthogonal d'une somme de vecteurs est la somme des projetés, et que multiplier un vecteur par k multiplie son projeté par k .

Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration. Par bilinéarité et symétrie : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$.
Les deux autres se démontrent de la même façon. $\square$

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on obtient le calcul **à l'aide des normes seules** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Exemple. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 4 + 2 \times (-1) + 9 = 11$.

Exemple de développement. $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2 = 4 - 1 - 18 = -15$.

Propriété (avec les coordonnées). Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration. La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ (normes égales à 1) et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ (vecteurs orthogonaux). Comme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, la bilinéarité donne

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j}^2 = xx' + yy'.$$

Avec $\vec{v} = \vec{u}$: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. $\square$

Conséquences dans un repère orthonormé.

- Critère d'orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$.
- Coordonnées avec des produits scalaires : $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.

Pourquoi ? $\vec{u} \cdot \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{i} = x\vec{i} \cdot \vec{i} + y\vec{j} \cdot \vec{i} = x$, et de même pour y . $\square$

Exemple. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-2) \times 4 = -5$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ et $\vec{u} \cdot \vec{i} = 3$.

Astuce. Avec des coordonnées, utilise $xx' + yy'$: c'est le plus rapide. Avec une figure et des longueurs, utilise $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ ou le projeté orthogonal. Avec des vecteurs de figure ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$...), décompose avec la relation de Chasles pour faire apparaître des vecteurs dont tu connais les normes ou qui sont orthogonaux, puis **développe**. Pour une vérification, recalcule avec une autre écriture.

Pièges :

- La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$ est faux : il manque le double produit $2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'implique pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: les deux vecteurs peuvent être orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$: on ne « simplifie » pas par un vecteur.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ n'est pas égal à $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ en général.

« Simplifier » un produit scalaire, c'est comme simplifier une fraction en barrant les chiffres au hasard : ça rassure, mais ça ne marche pas.

3. Orthogonalité et angles

Rappel. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Calcul d'un angle. Pour deux vecteurs non nuls, si θ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. On en déduit l'angle avec la calculatrice (mode degrés).

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, l'angle est **aigu** ;
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, l'angle est **obtus** ;
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, l'angle est **droit**.

Exemple. $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(2; 5)$. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

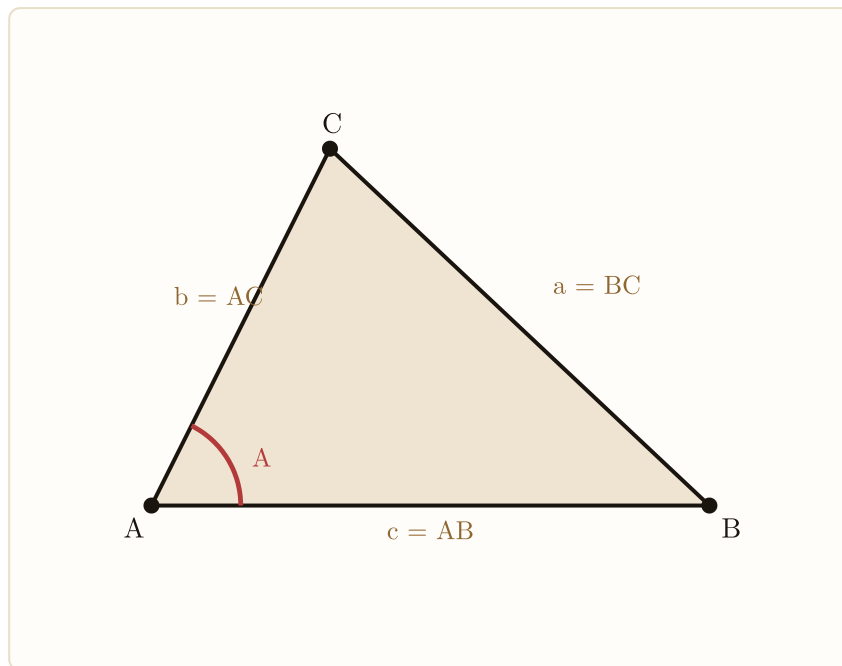
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 + 3 = 6$ et $AB = AC = \sqrt{10}$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{6}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{6}{10} = 0,6, \text{ donc } \widehat{BAC} \approx 53,1^\circ.$$

Astuce. Pour prouver qu'un triangle est **rectangle**, calcule le produit scalaire de deux côtés qui partent d'un même sommet : s'il est **nul**, l'angle est droit. C'est souvent plus simple que la réciproque de Pythagore.

4. Formule d'Al-Kashi : longueurs et angles dans un triangle

Dans un triangle ABC , on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les angles.



$$\text{Formule d'Al-Kashi : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Formule d'Al-Kashi (théorème de Pythagore généralisé). Dans tout triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

et de même $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

$$\text{Démonstration. } BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}. \quad \square$$

Si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$ et on retrouve le **théorème de Pythagore**.

Exemple (une longueur). $AB = 5$, $AC = 7$, $\hat{A} = 60^\circ$: $BC^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = 39$, donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.

Exemple (un angle). $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$: $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{84} = \frac{5}{7}$, donc $\hat{A} \approx 44,4^\circ$.

Pièges :

- Dans Al-Kashi, l'angle est **celui qui est entre les deux côtés b et c** ; le côté a est **en face** de l'angle $\hat{A}$.
- Calcule a^2 puis prends la racine : n'oublie pas la racine carrée à la fin.
- Pour trouver un angle avec Al-Kashi, isole $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, puis utilise la touche $\cos^{-1}$ en **mode degrés**.

Appliquer Al-Kashi avec un mauvais angle, c'est lire un plan de métro à l'envers : tu arrives, mais pas là où tu voulais.

5. Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et cercle de diamètre $[AB]$

Propriété. Soit I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

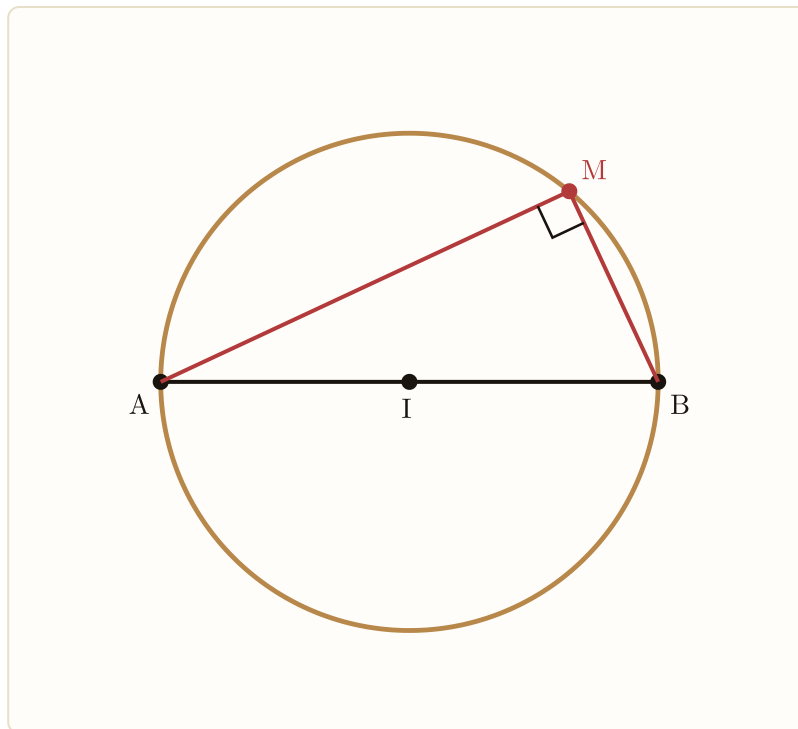
Démonstration. On introduit I : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \quad \square$$

Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} \iff MI = \frac{AB}{2}.$$

Cet ensemble est donc le **cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$** , c'est-à-dire le **cercle de diamètre $[AB]$** . Pour M distinct de A et B , cela signifie que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit. $\square$



Le cercle de diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, l'angle AMB est droit

Ensemble de points $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. Avec $AB = 6$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9 = k \iff MI^2 = k + 9$. Si $k > -9$, c'est un cercle de rayon $\sqrt{k+9}$; si $k = -9$, le point I ; si $k < -9$, l'ensemble vide.

Même méthode, deux autres calculs avec le milieu I . Ils ne sont pas à apprendre par cœur : on les retrouve en quelques lignes.

- **Somme de carrés.** Avec I milieu de $[AB]$: $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ (les doubles produits s'annulent).
- **Longueur d'une médiane.** Avec I milieu de $[BC]$: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $4AI^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Or $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ (c'est Al-Kashi), donc $4AI^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$.

Exemple (médiane). $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$: $4AI^2 = 2 \times 36 + 2 \times 64 - 100 = 100$, donc $AI = 5$.

Exemple (ensemble de points). $AB = 8$, I milieu de $[AB]$. Les points M tels que $MA^2 + MB^2 = 40$ vérifient $2MI^2 + 32 = 40$, soit $MI = 2$: c'est le cercle de centre I et de rayon 2.

Pièges :

- Ces calculs demandent que I soit le **milieu** du segment, pas un point quelconque.
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$: ne confonds pas $\frac{AB^2}{4}$ avec $\left(\frac{AB}{4}\right)^2$ ni avec $\frac{AB}{2}$.

Pour aller plus loin, hors programme

Hors programme de Première. Ces deux résultats ne sont pas exigibles et aucun exercice du chapitre n'en a besoin.

- **Aire d'un triangle.** Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , l'aire vaut $\frac{1}{2} AB \times CH$.
Dans le triangle AHC rectangle en H , $CH = AC \sin \hat{A}$, d'où aire = $\frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$. Au programme, on calcule plutôt CH avec le projeté orthogonal et le théorème de Pythagore (voir la fiche 3).
- **Loi des sinus :** $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$. Elle est admise ici (c'est un approfondissement possible du programme).

Un peu d'histoire

- La notion de **vecteur** était implicite en mécanique depuis Galilée, mais elle a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie dans la façon dont elle apparaît chez **Leibniz**, lors de ses recherches sur un calcul des variations.
- Le **XIX^e siècle** voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le **produit scalaire** et de la notion de **travail** en physique : c'est la caisse du début du cours.
- Le calcul vectoriel et le produit scalaire donnent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.
- La caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à **Thalès**.

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.