

Produit scalaire : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- un triangle en repère orthonormé : produits scalaires, angles, aire, **script Python** ;
- un **ensemble de points** défini avec $MA^2 + MB^2$;
- un triangle défini par ses côtés et un angle de 120° : Al-Kashi, médiane, projeté orthogonal, aire, hauteur.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- **coordonnées** des vecteurs écrites avant chaque produit scalaire ;
- **formule nommée** (Al-Kashi, Chasles avec le milieu I , projeté orthogonal) à chaque utilisation ;
- **conclusion** avec les angles arrondis et les unités.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Fais une **figure** même quand l'énoncé n'en demande pas.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus ».

Exercice 1 : un triangle en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$ et $C(4; 3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC .
2. En déduire $\cos \widehat{BAC}$ puis $\widehat{BAC}$ à $0,1^\circ$ près.
3. Calculer de même $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Vérifier que la somme des trois angles est 180° (aux arrondis près).
4. Calculer l'aire du triangle ABC de deux façons.
5. Écrire un script Python qui affiche, à partir des coordonnées, les trois angles du triangle arrondis au dixième de degré.

Correction de la question 1

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 + (-3) \times 1 = 20 - 3 = 17.$$

$$AB = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ et } AC = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17, AB = 5 \text{ et } AC = \sqrt{26}.$$

Correction de la question 2

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{17}{5\sqrt{26}} \approx 0,667.$$

$$\widehat{BAC} \approx 48,2^\circ.$$

Correction de la question 3

$$\text{En } B. \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} : \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 + 12 = 8 \text{ et } BC = \sqrt{17}.$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{8}{5\sqrt{17}} \approx 0,388, \text{ donc } \widehat{ABC} \approx 67,2^\circ.$$

$$\text{En } C. \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} : \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 + 4 = 9.$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{9}{\sqrt{26}\sqrt{17}} \approx 0,428, \text{ donc } \widehat{ACB} \approx 64,7^\circ.$$

Somme des valeurs arrondies : $48,2 + 67,2 + 64,7 = 180,1$.

La somme vaut $180,1^\circ$ au lieu de 180° : l'écart de $0,1^\circ$ vient des arrondis. Sans arrondir, la somme vaut exactement 180° .

Correction de la question 4

Première façon (projeté orthogonal). Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17 > 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$, donc $AH = \frac{17}{5}$.

Dans le triangle AHC rectangle en H : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 26 - \frac{289}{25} = \frac{361}{25}$, donc $CH = \frac{19}{5}$.

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{19}{5} = \frac{19}{2}.$$

Seconde façon (déterminant, outil de Seconde). Aire = $\frac{1}{2} \left| x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AC}} \right| = \frac{1}{2} |4 \times 1 - (-3) \times 5| = \frac{19}{2}.$

$$\text{Aire} = \frac{19}{2} = 9,5 \text{ unités d'aire.}$$

Correction de la question 5

Le script calcule, pour chaque sommet, le produit scalaire des deux vecteurs qui en partent, puis applique $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

```
from math import sqrt, acos, degrees

def angle(P, Q, R):
    """Angle PQR en degrés, calculé avec le produit scalaire."""
    u = (P[0] - Q[0], P[1] - Q[1])
    v = (R[0] - Q[0], R[1] - Q[1])
    ps = u[0] * v[0] + u[1] * v[1]
    nu = sqrt(u[0]**2 + u[1]**2)
    nv = sqrt(v[0]**2 + v[1]**2)
    return degrees(acos(ps / (nu * nv)))

A, B, C = (-1, 2), (3, -1), (4, 3)
print(round(angle(B, A, C), 1), round(angle(A, B, C), 1), round(angle(A, C, B), 1))
```

Il affiche 48.2 67.2 64.7, ce qui confirme les questions 2 et 3.

Le script affiche les trois angles : à comparer avec les calculs à la main.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : coordonnées écrites, produit scalaire et normes.
- **Q2** : formule de l'angle, **valeur exacte** avant l'arrondi.
- **Q3** : trois angles, **vérification par la somme** en tenant compte des arrondis.
- **Q4** : deux méthodes cohérentes (projeté orthogonal, déterminant).
- **Q5** : le produit scalaire est programmé avec les coordonnées ; le sommet de l'angle est le point d'où partent les deux vecteurs.

Exercice 2 : un ensemble de points

Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 et I son milieu. Pour un réel k , on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

1. Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 32$ pour tout point M (on introduira I avec la relation de Chasles).
2. Déterminer $\mathcal{E}_{40}$.
3. Déterminer $\mathcal{E}_{32}$ puis $\mathcal{E}_{20}$.
4. Pour quelles valeurs de k l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est-il un cercle ?

Correction de la question 1

On introduit I : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

$$MA^2 + MB^2 = (MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2) + (MI^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2) = 2MI^2 + 2IA^2.$$

Comme $IA = \frac{AB}{2} = 4$: $2IA^2 = 32$. Ce calcul est valable pour tout point M , même sur la droite (AB) .

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 32.$$

Correction de la question 2

$$MA^2 + MB^2 = 40 \iff 2MI^2 + 32 = 40 \iff MI^2 = 4 \iff MI = 2.$$

$\mathcal{E}_{40}$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

Correction de la question 3

$$MA^2 + MB^2 = 32 \iff 2MI^2 = 0 \iff M = I.$$

$$MA^2 + MB^2 = 20 \iff 2MI^2 = -12 \iff MI^2 = -6 : \text{impossible car un carré est positif.}$$

$$\mathcal{E}_{32} = \{I\} \text{ et } \mathcal{E}_{20} = \emptyset.$$

Correction de la question 4

$$MA^2 + MB^2 = k \iff MI^2 = \frac{k - 32}{2}.$$

Si $k > 32$: cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-32}{2}}$. Si $k = 32$: un point. Si $k < 32$: l'ensemble vide.

$\mathcal{E}_k$ est un cercle si et seulement si $k > 32$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : relation de Chasles avec I , disparition des doubles produits, calcul de $2IA^2$.
- **Q2** : passage de $MI^2 = 4$ à $MI = 2$, **description géométrique** du cercle.
- **Q3** : les deux cas **dégénérés** (un point, vide) justifiés.
- **Q4** : discussion complète selon k .

Exercice 3 : un triangle avec un angle de 120°

Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 9$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BC (valeur exacte, puis arrondie au centième).
3. Calculer la médiane AI .
4. Calculer l'aire du triangle et la hauteur issue de A (on utilisera le projeté orthogonal H de C sur (AB)).

Correction de la question 1

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 120^\circ = 6 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -27.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -27.$$

Correction de la question 2

$$\text{D'après Al-Kashi : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 120^\circ = 36 + 81 - 2 \times 54 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 117 + 54 = 171.$$

$$BC = \sqrt{171} = 3\sqrt{19} \approx 13,08.$$

Correction de la question 3

I est le milieu de $[BC]$: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$4AI^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 + 81 - 54 = 63, \text{ donc } AI^2 = \frac{63}{4}.$$

$$AI = \frac{\sqrt{63}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \approx 3,97.$$

Correction de la question 4

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -27 < 0$: H est de l'autre côté de A que B et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$. Donc $AH = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

Dans le triangle AHC rectangle en H : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 81 - \frac{81}{4} = \frac{243}{4}$, donc $CH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23,38.$$

$$\text{Hauteur issue de } A : h = \frac{2 \times \text{Aire}}{BC} = \frac{27\sqrt{3}}{3\sqrt{19}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \approx 3,58.$$

$$\text{Aire} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23,38 \text{ et } h \approx 3,58.$$

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : signe négatif justifié par l'angle obtus.
- **Q2** : Al-Kashi avec les deux côtés autour de l'angle.
- **Q3** : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ puis calcul de AI^2 avant la racine.
- **Q4** : position de H (angle obtus : H hors du segment $[AB]$), puis aire, puis **hauteur** à partir de l'aire.