

Produit scalaire**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Sauf indication contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice S1 : Un triangle rectangle avec paramètre

Soit t un réel. On donne $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(0; t)$.

1. Exprimer en fonction de t les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2. Pour chacun des trois sommets, déterminer les valeurs de t pour lesquelles le triangle ABC est rectangle en ce sommet. Vérifier que, pour ces valeurs, les points A , B , C ne sont pas alignés (on pourra montrer que A , B , C sont alignés si et seulement si $6t - 10 = 0$).
3. Pour $t = 5$, montrer que C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et donner une équation de ce cercle.

Exercice S2 : Lignes de niveau de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Soit $[AB]$ un segment de longueur 6 et I son milieu. Pour un réel k , on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1. Montrer que, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$. (On pourra écrire $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.)
2. Déterminer $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_{16}$, $\mathcal{E}_{-9}$ et $\mathcal{E}_{-10}$.
3. Discuter, selon les valeurs de k , la nature de $\mathcal{E}_k$. Quelle est la plus petite valeur possible de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$?
4. Soit M un point tel que le triangle MAB soit équilatéral. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ de deux façons différentes : avec l'angle, puis avec la question 1.

Exercice S3 : Droites définies par un produit scalaire

On donne $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan et I le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$. Montrer que $I \in \mathcal{D}$ et en déduire que $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$.
2. Montrer que $MA^2 - MB^2 = 8x + 4y - 36$. Retrouver ainsi l'équation de la médiatrice de $[AB]$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 12$. Vérifier que $P(6; 0)$ appartient à cet ensemble.

Exercice S4 : Deux groupes de randonneurs

Depuis un camp A , un premier groupe marche 5 km en ligne droite jusqu'au point B , et un second groupe marche 3 km en ligne droite jusqu'au point C . Les deux directions forment un angle $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

1. Calculer la distance BC entre les deux groupes.
2. Calculer $\cos \widehat{ABC}$ puis $\widehat{ABC}$ au dixième de degré. Calculer de même $\widehat{ACB}$ et vérifier la cohérence avec la somme des angles du triangle.
3. Calculer l'aire du triangle ABC (valeur exacte, puis arrondie au centième de km^2), puis la distance du camp A à la droite (BC) (arrondie au centième de km).
4. Un point de rendez-vous I est situé au milieu de $[BC]$. Calculer la distance AI .
5. Retrouver $\widehat{ABC}$ avec la loi des sinus $\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}}$. Pourquoi l'angle obtus de même sinus est-il à exclure?

Exercice S5 : Théorème de la médiane

1. Dans un triangle ABC , on donne $AB = 9$, $AC = 7$ et la médiane $AI = 6$ où I est le milieu de $[BC]$. Calculer BC .
2. Soit $[AB]$ un segment de longueur 6 et I son milieu. Pour un réel k , on note $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$. Déterminer $\mathcal{F}_{30}$.

3. Déterminer $\mathcal{F}_{36}$ et montrer que c'est le cercle de diamètre $[AB]$. Faire le lien avec le théorème de Pythagore.
4. Discuter la nature de $\mathcal{F}_k$ selon les valeurs de k .

Exercice S6 : Un rectangle et un point mobile

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 2$ et $BC = 6$. Un point M se déplace sur le segment $[BC]$ et on pose $BM = x$ avec $x \in [0; 6]$. On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

1. Donner les coordonnées de A, B, C, D et M .
2. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = x^2 - 6x + 4$.
3. Déterminer les positions de M pour lesquelles l'angle $\widehat{AMD}$ est droit.
4. Étudier, selon la valeur de x , si l'angle $\widehat{AMD}$ est aigu ou obtus.
5. Pour $x = 3$, calculer $\cos \widehat{AMD}$ puis $\widehat{AMD}$ au dixième de degré.

Exercice S7 : Python : nature d'un triangle

On considère le programme suivant, où les points sont des couples de coordonnées (repère orthonormé).

```
def ps(u, v):
    return ...           # à compléter
```

```
def vecteur(A, B):
    return (B[0] - A[0], B[1] - A[1])
```

```
def nature(A, B, C):
    p = [ps(vecteur(A, B), vecteur(A, C)),
          ps(vecteur(B, A), vecteur(B, C)),
          ps(vecteur(C, A), vecteur(C, B))]
    if 0 in p:
        return "rectangle"
    elif min(p) < 0:
        return "obtusangle"
    else:
        return "acutangle"
```

1. Compléter la fonction `ps`.
2. Pour $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(1; 3)$, donner la liste `p` puis la valeur renvoyée par `nature((0, 0), (4, 0), (1, 3))`.
3. Même question avec `nature((0, 0), (4, 0), (-1, 2))`.
4. Expliquer pourquoi le signe du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ renseigne sur la nature de l'angle $\widehat{BAC}$. Pourquoi, dans un triangle, ne peut-il y avoir au plus qu'une valeur négative ou nulle dans la liste `p`?
5. Montrer que l'aire d'un triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \times AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$. En déduire une fonction `aire(A, B, C)` utilisant `ps` et `vecteur`, et la valeur renvoyée pour $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$.

Exercice S8 : Droite et cercle en repère

On donne $A(2; -1)$ et $B(-4; 3)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

1. Déterminer une équation de la droite d perpendiculaire à (AB) passant par A (écrire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$).
2. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$. Quel est cet ensemble? Justifier que son centre est le milieu de $[AB]$.
3. Déterminer les points d'intersection de d et du cercle. Interpréter géométriquement.

Exercice S9 : Parallélogramme, losange, rectangle

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On rappelle que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$. En déduire que $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.
2. Montrer que $AC^2 - BD^2 = 4 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire que $ABCD$ est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont la même longueur.
3. Application : $AB = 5$, $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Calculer AC^2 , BD^2 et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, puis l'angle aigu formé par les droites (AC) et (BD) au dixième de degré.

Exercice S10 : Deux droites, un angle et une famille de cercles

On considère les droites $d_1 : 2x - y + 1 = 0$ et $d_2 : x + 3y - 10 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à chacune des droites. Montrer que d_1 et d_2 sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection P .
2. Déterminer l'angle aigu formé par d_1 et d_2 , au dixième de degré (on pourra utiliser les vecteurs normaux).
3. Pour tout réel m , on note $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$. Discuter, selon les valeurs de m , la nature de $\mathcal{C}_m$.
4. Montrer que les abscisses des points communs à d_1 et $\mathcal{C}_m$ sont les solutions de $5x^2 + 10x + 5 + m = 0$. En déduire, selon les valeurs de m , le nombre de points communs à d_1 et $\mathcal{C}_m$.
5. Pour $m = 0$, déterminer le point de contact T de d_1 et $\mathcal{C}_0$ et justifier géométriquement que d_1 est tangente à $\mathcal{C}_0$ en T à l'aide du centre Ω de $\mathcal{C}_0$.

Exercice S11 : Coordonnées dans une base orthonormée

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\vec{e}_1\|$, $\|\vec{e}_2\|$ et $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$. Que peut-on dire de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?
2. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $a = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$ et $b = \vec{u} \cdot \vec{e}_2$, puis vérifier que $\vec{u} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$.
3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée quelconque et $\vec{u} = a \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$. Montrer que $a = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$ et $b = \vec{u} \cdot \vec{e}_2$. Que représentent a et b ?
4. Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, puis vérifier que $\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2$ pour le vecteur $\vec{u}$ de la question 2.