

Corrigé : Produit scalaire

Fiche Standard

S1.

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \end{pmatrix} : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 + 2(t-1) = 2t + 10.$
 $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ t-3 \end{pmatrix} : \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 24 - 2(t-3) = 30 - 2t.$
 $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-t \end{pmatrix}, \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3-t \end{pmatrix} : \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -8 + (1-t)(3-t) = t^2 - 4t - 5.$
- Un triangle est rectangle en un sommet si et seulement si le produit scalaire correspondant est nul (et que le triangle n'est pas aplati).
 - En $A : 2t + 10 = 0 \iff t = -5.$
 - En $B : 30 - 2t = 0 \iff t = 15.$
 - En $C : t^2 - 4t - 5 = 0.$ On a $\Delta = 16 + 20 = 36$, donc $t = \frac{4-6}{2} = -1$ ou $t = \frac{4+6}{2} = 5$ (ou on factorise : $(t-5)(t+1)$).

Alignement : A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, soit $6(t-1) - 2 \times 2 = 6t - 10 = 0$, c'est-à-dire $t = \frac{5}{3}$. Aucune des valeurs $-5, -1, 5, 15$ n'est égale à $\frac{5}{3}$.

Conclusion : ABC est rectangle en A si $t = -5$, en B si $t = 15$, en C si $t = -1$ ou $t = 5$, et seulement dans ces cas.
- Pour $t = 5$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 : C$ est tel que l'angle $\widehat{ACB}$ est droit, donc C appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ est $I(1; 2)$ et $IA^2 = (-2-1)^2 + (1-2)^2 = 10$.
 Conclusion : le cercle a pour équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Vérification : B donne $3^2 + 1^2 = 10$ et $C(0; 5)$ donne $1 + 9 = 10$.

S2.

- I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$, et $IA = \frac{AB}{2} = 3$.
 Conclusion : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$.
- D'après la question 1, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 = k + 9$.
 - $k = 0 : MI^2 = 9, MI = 3$: cercle de centre I et de rayon 3 (cercle de diamètre $[AB]$).
 - $k = 16 : MI^2 = 25$: cercle de centre I et de rayon 5.
 - $k = -9 : MI^2 = 0 : \mathcal{E}_{-9} = \{I\}$.
 - $k = -10 : MI^2 = -1$, impossible : $\mathcal{E}_{-10} = \emptyset$.
- $\mathcal{E}_k$ est défini par $MI^2 = k + 9$. Si $k > -9$, c'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+9}$; si $k = -9$, c'est le point I ; si $k < -9$, c'est l'ensemble vide. Comme $MI^2 \geq 0$, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \geq -9$ pour tout M , avec égalité si et seulement si $M = I$.
 Conclusion : la plus petite valeur de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est -9 , atteinte uniquement en I .
- Avec l'angle : $MA = MB = 6$ et $\widehat{AMB} = 60^\circ$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 18$. Avec la question 1 : MI est la hauteur du triangle équilatéral de côté 6, donc $MI = 3\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 27 - 9 = 18$.
 Conclusion : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 18$ par les deux méthodes.

S3.

- $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(x-1) + 2(y-2) = 4x + 2y - 8$. Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 \iff 4x + 2y = 18 \iff 2x + y = 9$. Le milieu est $I(3; 3)$ et $2 \times 3 + 3 = 9$, donc $I \in \mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathcal{D} : \mathcal{D}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par I .
 Conclusion : $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $2x + y = 9$, médiatrice de $[AB]$.

2. $MA^2 - MB^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - (x-5)^2 - (y-4)^2 = (-2x+1+10x-25) + (-4y+4+8y-16) = 8x+4y-36$. Alors $MA = MB \iff MA^2 - MB^2 = 0 \iff 8x+4y-36=0 \iff 2x+y=9$.

Conclusion : on retrouve la médiatrice d'équation $2x+y=9$.

3. $MA^2 - MB^2 = 12 \iff 8x+4y-36=12 \iff 2x+y=12$. Pour $P(6; 0)$: $PA^2 = 25+4=29$, $PB^2 = 1+16=17$ et $29-17=12$.

Conclusion : c'est la droite d'équation $2x+y=12$, parallèle à la médiatrice, perpendiculaire à (AB) ; elle contient P .

S4.

1. Al-Kashi dans ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$.

Conclusion : $BC = 7$ km.

2. $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \times BC} = \frac{25 + 49 - 9}{70} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$, donc $\widehat{ABC} \approx 21,8^\circ$. $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 AC \times BC} = \frac{9 + 49 - 25}{42} = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}$, donc $\widehat{ACB} \approx 38,2^\circ$. Vérification : $120 + 21,8 + 38,2 = 180$.

Conclusion : $\widehat{ABC} \approx 21,8^\circ$ et $\widehat{ACB} \approx 38,2^\circ$.

3. Aire = $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \approx 6,50$ km². La distance de A à (BC) est la hauteur h issue de A : $\frac{1}{2} BC \times h = \text{Aire}$, donc $h = \frac{2 \times \frac{15\sqrt{3}}{4}}{7} = \frac{15\sqrt{3}}{14} \approx 1,86$ km.

Conclusion : aire $\frac{15\sqrt{3}}{4} \approx 6,50$ km² ; distance de A à (BC) : $\frac{15\sqrt{3}}{14} \approx 1,86$ km.

4. Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$, soit $34 = 2 AI^2 + \frac{49}{2}$. Donc $AI^2 = \frac{19}{4}$.

Conclusion : $AI = \frac{\sqrt{19}}{2} \approx 2,18$ km.

5. $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC \sin 120^\circ}{BC} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \approx 0,371$, donc $\widehat{ABC} \approx 21,8^\circ$ ou $\widehat{ABC} \approx 158,2^\circ$. Comme $\widehat{BAC} = 120^\circ$, la somme $120^\circ + 158,2^\circ$ dépasse 180° : seul l'angle aigu convient.

Conclusion : $\widehat{ABC} \approx 21,8^\circ$, ce qui confirme la question 2.

S5.

1. Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$, soit $81 + 49 = 72 + \frac{BC^2}{2}$. Donc $\frac{BC^2}{2} = 58$ et $BC^2 = 116$.

Conclusion : $BC = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \approx 10,77$. (Un tel triangle existe : $2 < BC < 16$.)

2. $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 MI^2 + 18$. Donc $MA^2 + MB^2 = 30 \iff MI^2 = 6$.

Conclusion : $\mathcal{F}_{30}$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

3. $MA^2 + MB^2 = 36 \iff 2 MI^2 = 18 \iff MI = 3 = \frac{AB}{2}$.

Conclusion : $\mathcal{F}_{36}$ est le cercle de centre I et de rayon 3, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$. Comme $AB^2 = 36$, la condition s'écrit $MA^2 + MB^2 = AB^2$: par la réciproque du théorème de Pythagore, pour $M \neq A$ et $M \neq B$ elle exprime que le triangle AMB est rectangle en M .

4. $MA^2 + MB^2 = k \iff MI^2 = \frac{k-18}{2}$. Si $k > 18$, $\mathcal{F}_k$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-18}{2}}$; si $k = 18$, c'est $\{I\}$; si $k < 18$, c'est l'ensemble vide.

S6.

1. $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 6)$, $D(0; 6)$ et $M(2; x)$ (car $\overrightarrow{BM} = x \vec{j}$).

2. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -2 \\ -x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MD} \begin{pmatrix} -2 \\ 6-x \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 4 - x(6-x) = x^2 - 6x + 4$.

3. $M \neq A$ et $M \neq D$ (car $M \in [BC]$), et $\widehat{AMD}$ est droit si et seulement si $x^2 - 6x + 4 = 0$. Ici

$\Delta = 36 - 16 = 20$ et $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$. Or $3 - \sqrt{5} \approx 0,76$ et $3 + \sqrt{5} \approx 5,24$ appartiennent à $[0; 6]$.

Conclusion : l'angle $\widehat{AMD}$ est droit pour $BM = 3 - \sqrt{5}$ et pour $BM = 3 + \sqrt{5}$.

4. Le trinôme $x^2 - 6x + 4$ est positif à l'extérieur de ses racines. Donc $\widehat{AMD}$ est aigu pour $x \in [0; 3 - \sqrt{5}[\cup]3 + \sqrt{5}; 6]$ et obtus pour $x \in]3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}[$.

5. Pour $x = 3$: $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MD} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 4 - 9 = -5$ (cohérent avec $9 - 18 + 4 = -5$) et

$$MA = MD = \sqrt{13}. \text{ Donc } \cos \widehat{AMD} = \frac{-5}{13}.$$

Conclusion : $\cos \widehat{AMD} = -\frac{5}{13}$ et $\widehat{AMD} \approx 112,6^\circ$.

S7.

1. `return u[0] * v[0] + u[1] * v[1]`

2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: 4. $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$: 12. $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$: $-3 + 9 = 6$.

Conclusion : $p = [4, 12, 6]$, aucune valeur nulle ni négative : la fonction renvoie "acutangle".

3. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: -4. $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$: 20. $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$: $5 + 4 = 9$.

Conclusion : $p = [-4, 20, 9]$, la plus petite valeur est négative : la fonction renvoie "obtusangle".

4. Pour deux vecteurs non nuls, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ avec $AB \times AC > 0$: le produit scalaire a le signe de $\cos \widehat{BAC}$. L'angle est aigu s'il est strictement positif, droit s'il est nul, obtus s'il est strictement négatif. Les angles d'un triangle non aplati sont strictement positifs et de somme 180° : deux angles supérieurs ou égaux à 90° donneraient une somme au moins égale à 180° , ce qui est impossible. Au plus un des trois produits est donc négatif ou nul, et le test `0 in p puis min(p) < 0` ne peut pas être ambigu.

5. $\sin \widehat{A} \geq 0$ car $\widehat{A} \in]0^\circ; 180^\circ[$, et $\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - AB^2 AC^2 \cos^2 \widehat{A}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}. \end{aligned}$$

`def aire(A, B, C):`

`u = vecteur(A, B)`

`v = vecteur(A, C)`

`return 0.5 * (ps(u, u) * ps(v, v) - ps(u, v) ** 2) ** 0.5`

Pour $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$: $AB^2 = 16$, $AC^2 = 10$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, donc $\frac{1}{2} \sqrt{160 - 16} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.

Conclusion : la fonction renvoie 6.0. (Contrôle : base 4, hauteur 3, aire $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.)

S8.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6(x-2) + 4(y+1) = -6x + 4y + 16 = -2(3x - 2y - 8)$.

Conclusion : d a pour équation $3x - 2y - 8 = 0$.

2. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 2-x \\ -1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -4-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ donnent $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (2-x)(-4-x) + (-1-y)(3-y) = (x^2 + 2x - 8) + (y^2 - 2y - 3) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11$. Or $(x+1)^2 + (y-1)^2 - 13 = x^2 + 2x + y^2 - 2y - 11$, d'où l'équivalence.

Conclusion : c'est le cercle de centre $\Omega(-1; 1)$ et de rayon $\sqrt{13}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$: Ω est le milieu de $[AB]$ car $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$, et $AB^2 = 36 + 16 = 52$, $\frac{AB^2}{4} = 13$.

3. Sur $d : y = \frac{3x-8}{2}$. Alors $(x+1)^2 + \left(\frac{3x-10}{2}\right)^2 = 13$, soit $4(x+1)^2 + (3x-10)^2 = 52$, c'est-à-dire $13x^2 - 52x + 52 = 0$, ou encore $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$. Donc $x = 2$ et $y = \frac{6-8}{2} = -1$.
Conclusion : d et le cercle n'ont qu'un seul point commun, $A(2; -1)$. La droite d est tangente au cercle en A (elle est perpendiculaire en A au rayon $[\Omega A]$, porté par (AB)).

S9.

1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2$ (identité remarquable). Ainsi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \iff AD^2 = AB^2 \iff AD = AB$. Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux est un losange.
Conclusion : ABCD est un losange si et seulement si $(AC) \perp (BD)$.
2. $AC^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$ et $BD^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$. En soustrayant : $AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. Donc $AC = BD \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \iff (AB) \perp (AD)$. Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle.
Conclusion : ABCD est un rectangle si et seulement si $AC = BD$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 10$. Donc $AC^2 = 25 + 20 + 16 = 61$ et $BD^2 = 25 - 20 + 16 = 21$ (on a bien $61 - 21 = 4 \times 10$). Puis $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 16 - 25 = -9$. L'angle θ entre les vecteurs vérifie $\cos \theta = \frac{-9}{\sqrt{61}\sqrt{21}} = -\frac{9}{\sqrt{1281}} \approx -0,2515$, donc $\theta \approx 104,6^\circ$. L'angle aigu entre les droites est son supplémentaire.
Conclusion : $AC^2 = 61$, $BD^2 = 21$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -9$; les diagonales forment un angle aigu d'environ $75,4^\circ$.

S10.

1. Vecteurs normaux : $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour d_1 et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour d_2 . Ils ne sont pas colinéaires car $2 \times 3 - (-1) \times 1 = 7 \neq 0$, donc les droites sont sécantes. Pour $P : y = 2x + 1$ dans d_2 donne $x + 3(2x + 1) - 10 = 0$, soit $7x = 7$, $x = 1$ et $y = 3$.
Conclusion : $P(1; 3)$ (contrôle : $2 - 3 + 1 = 0$ et $1 + 9 - 10 = 0$).
2. L'angle entre deux droites est égal (ou supplémentaire) à l'angle entre leurs vecteurs normaux. On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 3 = -1$, $\|\vec{n}_1\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{n}_2\| = \sqrt{10}$, donc $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{-1}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, soit un angle d'environ $98,1^\circ$ entre les normales. L'angle aigu entre les droites est son supplémentaire.
Conclusion : l'angle aigu formé par d_1 et d_2 vaut environ $81,9^\circ$.
3. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - m$.
Conclusion : si $m < 5$, $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $\sqrt{5 - m}$; si $m = 5$, c'est le point Ω ; si $m > 5$, c'est l'ensemble vide.
4. Un point de d_1 s'écrit $(x; 2x+1)$. Il est dans $\mathcal{C}_m$ si et seulement si $x^2 + (2x+1)^2 - 2x + 4(2x+1) + m = 0$, c'est-à-dire $5x^2 + 10x + 5 + m = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 100 - 20(5 + m) = -20m$.
 - Si $m < 0$: $\Delta > 0$, deux points communs.
 - Si $m = 0$: $\Delta = 0$, un seul point commun.
 - Si $m > 0$: $\Delta < 0$, aucun point commun (pour $m > 5$, $\mathcal{C}_m$ est vide, et pour $m = 5$, $\mathcal{C}_5 = \{\Omega\}$ avec $\Omega \notin d_1$ car $2 + 2 + 1 \neq 0$).*Conclusion : deux points communs si $m < 0$, un seul si $m = 0$, aucun si $m > 0$.*
5. Pour $m = 0$: $5x^2 + 10x + 5 = 5(x+1)^2 = 0$ donne $x = -1$ et $y = -1$, donc $T(-1; -1)$. Le centre est $\Omega(1; -2)$ et $\overrightarrow{\Omega T} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{n}_1$: le rayon $[\Omega T]$ est dirigé par le vecteur normal de d_1 , donc d_1 est perpendiculaire en T au rayon $[\Omega T]$.
Conclusion : $T(-1; -1)$ et d_1 est tangente à $\mathcal{C}_0$ en T .

S11.

1. $\|\vec{e}_1\|^2 = \frac{9+16}{25} = 1$, $\|\vec{e}_2\|^2 = \frac{16+9}{25} = 1$ et $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{3 \times (-4) + 4 \times 3}{25} = 0$. Les vecteurs sont unitaires et orthogonaux : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée.
2. $a = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \frac{7 \times 3 + 1 \times 4}{5} = 5$ et $b = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \frac{7 \times (-4) + 1 \times 3}{5} = -5$. Alors $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = 5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}$.
3. Par bilinéarité, $\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = a\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = a\|\vec{e}_1\|^2 + b\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = a \times 1 + b \times 0 = a$. De même $\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = a\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + b\|\vec{e}_2\|^2 = b$. Dans une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur sont ses produits scalaires avec les vecteurs de la base.
4. $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = \frac{3}{5}$ et $\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = -\frac{4}{5}$, donc $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2$. Vérification : $\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 \\ 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin $\|\vec{u}\|^2 = 7^2 + 1^2 = 50$ et $a^2 + b^2 = 25 + 25 = 50$.

Conclusion : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est orthonormée ; $\vec{u} = 5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$; les coordonnées dans une base orthonormée sont les produits scalaires avec les vecteurs de la base ; $\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2$.