

Produit scalaire**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Sauf indication contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice D1 : Expression analytique, puis pour aller plus loin (hors programme) : Lagrange et Cauchy-Schwarz

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Les questions 2 à 5 sont hors programme (identité de Lagrange, inégalité de Cauchy-Schwarz) : elles sont proposées pour aller plus loin.

1. Démontrer, à partir de la définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$, que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
2. Montrer que $(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$.
3. En déduire que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
4. Vérifier l'identité de la question 2 pour $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que, pour tous réels a et b , $|3a + 4b| \leq 5\sqrt{a^2 + b^2}$, et préciser le cas d'égalité.

Exercice D2 : Théorème de la médiane et cercle de diamètre : démonstrations

1. Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$. (On pourra écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$.)
2. Dans un triangle ABC tel que $BC = 14$, $CA = 15$ et $AB = 13$, on note I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Calculer les longueurs AI , BJ et CK (valeurs exactes, puis arrondies au centième).
3. Démontrer que, dans tout triangle, $AI^2 + BJ^2 + CK^2 = \frac{3}{4} (AB^2 + BC^2 + CA^2)$. Vérifier ce résultat avec les valeurs de la question 2.
4. Soit $[AB]$ un segment et I son milieu. Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice D3 : Orthocentre et centre du cercle circonscrit

1. Soit ABC un triangle non aplati, O le centre de son cercle circonscrit et H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
 - a) Exprimer $\overrightarrow{HA}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, puis montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
 - b) Montrer de même que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.
 - c) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC .
2. Application : le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O , et $A(5; 0)$, $B(3; 4)$, $C(-4; 3)$.
 - a) Montrer que O est le centre du cercle circonscrit à ABC (on vérifiera d'abord que ABC n'est pas aplati).
 - b) Déterminer les coordonnées de H et vérifier par le calcul que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Exercice D4 : Somme de carrés de distances et centre de gravité

Soit $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 3)$, G le centre de gravité du triangle ABC et $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ pour tout point M du plan.

1. Déterminer les coordonnées de G et calculer GA^2 , GB^2 , GC^2 ainsi que leur somme.
2. Montrer que, pour tout point M , $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$. (On admet que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et on écrira $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, etc.)

3. Déterminer la valeur minimale de $f(M)$ et le point où elle est atteinte.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 45$. Donner son équation et vérifier que A lui appartient. Cet ensemble contient-il B ?

Exercice D5 : Distance d'un point à un segment

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Pour tout réel $t \in [0; 1]$, on note M_t le point défini par $\overrightarrow{AM_t} = t \overrightarrow{AC}$: lorsque t décrit $[0; 1]$, M_t décrit le segment $[AC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis montrer que $BM_t^2 = 16t^2 - 24t + 36$.
2. Mettre BM_t^2 sous forme canonique. En déduire la valeur de t pour laquelle BM_t est minimale, ainsi que cette distance minimale. Vérifier avec un calcul direct de la distance de B à la droite (AC) .
3. On suppose maintenant que $\widehat{BAC} = 120^\circ$ (les longueurs AB et AC sont inchangées). Montrer que $BM_t^2 = 16t^2 + 24t + 36$, puis déterminer la distance minimale de B à un point du segment $[AC]$. Pourquoi diffère-t-elle de la distance de B à la droite (AC) ?

Exercice D6 : Al-Kashi et problème à deux solutions

1. Démontrer la formule d'Al-Kashi : dans un triangle ABC , $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \widehat{BAC}$.
2. On cherche les triangles ABC tels que $AC = 8$, $BC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. On pose $x = AB$.
 - a) Montrer que x est solution de l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$ et la résoudre.
 - b) Justifier qu'il existe deux triangles distincts répondant aux conditions. Pour chacun, calculer $\cos \widehat{ABC}$, l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degré et l'aire (valeur exacte).
3. On garde $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$, mais on note $a = BC$. Discuter, selon les valeurs de $a > 0$, le nombre de triangles ABC possibles. Que se passe-t-il pour $a = 4\sqrt{3}$?

Exercice D7 : Python : classer les triangles à côtés entiers

On considère le programme suivant, qui parcourt tous les triplets d'entiers $a \leq b \leq c \leq n$.

```
def classer(n):
    aigu = 0
    droit = 0
    obtus = 0
    for c in range(1, n + 1):
        for b in range(1, c + 1):
            for a in range(1, b + 1):
                if a + b > c:
                    if c * c > a * a + b * b:
                        obtus += 1
                    elif c * c == a * a + b * b:
                        droit += 1
                    else:
                        aigu += 1
    return aigu, droit, obtus
```

1. Pourquoi la condition $a + b > c$ suffit-elle à garantir l'existence d'un triangle non aplati de côtés a, b, c (avec $a \leq b \leq c$) ?
2. En utilisant la formule d'Al-Kashi, justifier que l'angle opposé au côté c est obtus si et seulement si $c^2 > a^2 + b^2$, droit si et seulement si $c^2 = a^2 + b^2$. Pourquoi le triangle est-il alors acutangle dans le dernier cas ?
3. Pour $n = 5$, le programme examine 22 triangles. Lister ceux qui sont obtusangles ou rectangles, puis en déduire la valeur renvoyée par `classer(5)`.
4. Écrire une fonction `pythagore(n)` qui renvoie la liste des triplets (a, b, c) avec $a \leq b \leq c \leq n$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Donner son résultat pour $n = 13$.

Exercice D8 : Problème de synthèse : triangle isocèle et cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(-3; 1)$, $B(5; -3)$ et $C(1; 5)$. Soit I le milieu de $[AC]$.

1.
 - a) Calculer AB , BC et CA . Quelle est la nature du triangle ABC ? Est-il rectangle?
 - b) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis $\cos \widehat{ABC}$ et la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degré.
 - c) En déduire $\sin \widehat{ABC}$, puis l'aire du triangle ABC .
2. Déterminer les coordonnées de I , puis calculer BI^2 de deux façons : avec les coordonnées, puis avec le théorème de la médiane.
3. Soit Γ l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MC^2 = 160$.
 - a) Montrer que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon, puis que $B \in \Gamma$.
 - b) Donner une équation de Γ et une équation de la tangente à Γ en B .
 - c) Déterminer les points d'intersection P et Q de Γ et de la droite (AC) . Montrer que le triangle BPQ est rectangle en B de deux façons différentes.