

Corrigé : Produit scalaire

Fiche Défi

D1.

1. Dans un repère orthonormé, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2] = \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = xx' + yy'$.

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

2. $(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 = x^2x'^2 + 2xx'yy' + y^2y'^2 + x^2y'^2 - 2xx'yy' + x'^2y^2 = x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2$. Et $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2$. Les deux expressions sont égales.

3. D'après la question 2, $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (xy' - x'y)^2 \geq 0$. Donc $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$ et, la fonction racine carrée étant croissante sur $[0; +\infty[$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. L'égalité a lieu si et seulement si $(xy' - x'y)^2 = 0$, c'est-à-dire $xy' - x'y = 0$.

Conclusion : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $xy' - x'y = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 + 48 = 63$ et $xy' - x'y = 3 \times 12 - 5 \times 4 = 16$. Ainsi $63^2 + 16^2 = 3969 + 256 = 4225$, et $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 = 25 \times 169 = 4225$.

Conclusion : l'identité est vérifiée.

5. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3a + 4b$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'inégalité de la question 3

donne $|3a + 4b| \leq 5\sqrt{a^2 + b^2}$. Il y a égalité si et seulement si $3b - 4a = 0$.

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tous réels a et b , avec égalité si et seulement si $4a = 3b$ (par exemple $a = 3$, $b = 4 : 25 = 5 \times 5$).

D2.

1. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\vec{IC} = -\vec{IB}$. Alors $AB^2 + AC^2 = (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} - \vec{IB})^2 = 2AI^2 + 2IB^2$, car les doubles produits $\pm 2\vec{AI} \cdot \vec{IB}$ s'annulent. Or $IB = \frac{BC}{2}$, donc $2IB^2 = \frac{BC^2}{2}$.

Conclusion : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

2. Avec $BC = 14$, $CA = 15$, $AB = 13$:

- $AB^2 + AC^2 = 169 + 225 = 394 = 2AI^2 + 98$, donc $AI^2 = 148$ et $AI = 2\sqrt{37} \approx 12,17$.
- $BC^2 + BA^2 = 196 + 169 = 365 = 2BJ^2 + \frac{225}{2}$, donc $BJ^2 = \frac{505}{4}$ et $BJ = \frac{\sqrt{505}}{2} \approx 11,24$.
- $CA^2 + CB^2 = 225 + 196 = 421 = 2CK^2 + \frac{169}{2}$, donc $CK^2 = \frac{673}{4}$ et $CK = \frac{\sqrt{673}}{2} \approx 12,97$.

Conclusion : $AI = 2\sqrt{37} \approx 12,17$, $BJ = \frac{\sqrt{505}}{2} \approx 11,24$, $CK = \frac{\sqrt{673}}{2} \approx 12,97$.

3. Avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, le théorème de la médiane donne $AI^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, $BJ^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$ et $CK^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. En additionnant : $AI^2 + BJ^2 + CK^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. Vérification : $148 + \frac{505}{4} + \frac{673}{4} = 148 + \frac{1178}{4} = 442,5$ et $\frac{3}{4}(196 + 225 + 169) = \frac{3}{4} \times 590 = 442,5$.

Conclusion : la relation est démontrée et vérifiée sur l'exemple.

4. Pour tout point M , $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$, car I est le milieu de $[AB]$. Alors $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$, car $IA = \frac{AB}{2}$. Par suite

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} \iff MI = \frac{AB}{2}$ (une longueur est positive). L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Conclusion : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ et l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

D3.

1. a) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA} = -(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = -(OC^2 - OB^2) = 0$, car $OB = OC$ (rayon du cercle circonscrit).

b) De même $\overrightarrow{HB} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$, donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = -(OA^2 - OC^2) = 0$.

c) La relation $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ signifie que H appartient à la hauteur issue de A (la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) , ce qui inclut le cas $H = A$). De même H appartient à la hauteur issue de B . Ces deux hauteurs ne sont pas parallèles (car (BC) et (CA) ne le sont pas) : leur unique point commun est l'orthocentre.

Conclusion : H est l'orthocentre de ABC .

2. a) $OA^2 = 25$, $OB^2 = 9 + 16 = 25$, $OC^2 = 16 + 9 = 25$: les trois points sont à la distance 5 de O .

Le triangle n'est pas aplati : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifient $(-2) \times 3 - 4 \times (-9) = 30 \neq 0$, donc ne sont pas colinéaires. Un cercle passant par A, B, C est unique.

Conclusion : O est le centre du cercle circonscrit, de rayon 5.

b) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 5 + 3 - 4 \\ 0 + 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, donc $H(4; 7)$. $\overrightarrow{HA} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$: $-7 + 7 = 0$.

$\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$: $-9 + 9 = 0$. $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$: $16 - 16 = 0$.

Conclusion : $H(4; 7)$ est l'orthocentre ; les trois produits scalaires sont nuls.

D4.

1. $G \left(\frac{0+6+0}{3}; \frac{0+0+3}{3} \right) = (2; 1)$. $GA^2 = 4 + 1 = 5$, $GB^2 = 16 + 1 = 17$, $GC^2 = 4 + 4 = 8$, et $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 30$.

2. $f(M) = \sum (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + 30$, car $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Conclusion : $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + 30$.

3. $MG^2 \geq 0$, donc $f(M) \geq 30$, avec égalité si et seulement si $M = G$.

Conclusion : la valeur minimale de f est 30, atteinte uniquement en G .

4. $f(M) = 45 \iff 3MG^2 = 15 \iff MG^2 = 5$.

Conclusion : c'est le cercle de centre $G(2; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$, d'équation $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Pour A : $(0-2)^2 + (0-1)^2 = 5$, donc A appartient au cercle (directement : $f(A) = 0 + 36 + 9 = 45$).

Pour B : $f(B) = 36 + 0 + 45 = 81 \neq 45$, donc B n'appartient pas au cercle.

D5.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \cos 60^\circ = 12$. Puis $\overrightarrow{BM}_t = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}_t = t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BM_t^2 = t^2 AC^2 - 2t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 = 16t^2 - 24t + 36$.

2. $16t^2 - 24t + 36 = 16 \left(t - \frac{3}{4} \right)^2 - 9 + 36 = 16 \left(t - \frac{3}{4} \right)^2 + 27$. Cette quantité est minimale pour $t = \frac{3}{4} \in [0; 1]$, et vaut alors 27.

Conclusion : BM_t est minimale pour $t = \frac{3}{4}$ (soit $AM_t = 3$), et la distance minimale est $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Contrôle : la distance de B à la droite (AC) vaut $AB \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, et le projeté orthogonal H de B sur (AC) vérifie $AH = AB \cos 60^\circ = 3$, soit $t = \frac{3}{4}$.

3. Avec $\widehat{BAC} = 120^\circ$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \cos 120^\circ = -12$, donc $BM_t^2 = 16t^2 + 24t + 36$. Cette expression est strictement croissante sur $[0; 1]$ (somme de termes croissants pour $t \geq 0$), donc minimale en $t = 0$, où elle vaut 36.

Conclusion : la distance minimale de B au segment $[AC]$ est 6, atteinte en A . Le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) est le point H tel que $\overrightarrow{AH} = t_0 \overrightarrow{AC}$ avec $t_0 = -\frac{3}{4}$ (le minimum de $16t^2 + 24t + 36 = 16(t + \frac{3}{4})^2 + 27$) : il est hors du segment. La distance de B à la droite (AC) vaut $3\sqrt{3} \approx 5,20$, mais le point de la droite le plus proche de B n'appartient pas à $[AC]$, d'où $6 > 3\sqrt{3}$.

D6.

1. On écrit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Alors $BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Conclusion : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}$.

2. a) Al-Kashi : $7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos 60^\circ$, soit $49 = x^2 + 64 - 8x$, donc $x^2 - 8x + 15 = 0$. Le discriminant vaut $64 - 60 = 4$, d'où $x = \frac{8-2}{2} = 3$ ou $x = \frac{8+2}{2} = 5$. (Ou $(x-3)(x-5) = 0$.)
 b) Les deux valeurs conviennent : pour $x = 3$, les côtés 3, 7, 8 vérifient l'inégalité triangulaire ($3 + 7 > 8$), et pour $x = 5$ aussi ($5 + 7 > 8$) ; l'équation d'Al-Kashi étant une équivalence, l'angle en A vaut bien 60° dans les deux cas (contrôle : $\cos \hat{A} = \frac{9 + 64 - 49}{48} = \frac{1}{2}$ pour $x = 3$ et $\frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{1}{2}$ pour $x = 5$).

- $x = 5$: $\cos \widehat{ABC} = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$, donc $\widehat{ABC} \approx 81,8^\circ$; aire = $\frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.
- $x = 3$: $\cos \widehat{ABC} = \frac{9 + 49 - 64}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$, donc $\widehat{ABC} \approx 98,2^\circ$; aire = $\frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Conclusion : il existe deux triangles, avec $AB = 5$ ($\hat{B} \approx 81,8^\circ$, aire $10\sqrt{3}$) et $AB = 3$ ($\hat{B} \approx 98,2^\circ$, aire $6\sqrt{3}$). Les deux angles $\hat{B}$ sont supplémentaires.

3. Al-Kashi donne $a^2 = x^2 + 64 - 8x$, soit $x^2 - 8x + 64 - a^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 64 - 4(64 - a^2) = 4a^2 - 192 = 4(a^2 - 48)$. Le nombre de triangles est le nombre de racines strictement positives.

- Si $a < 4\sqrt{3}$: $\Delta < 0$, aucune solution, donc aucun triangle.
- Si $a = 4\sqrt{3}$: racine double $x = 4$, un seul triangle.
- Si $4\sqrt{3} < a < 8$: $\Delta > 0$, la somme des racines vaut $8 > 0$ et leur produit $64 - a^2 > 0$, donc deux racines strictement positives : deux triangles.
- Si $a = 8$: les racines sont 0 et 8, seule $x = 8$ convient : un seul triangle (équilatéral de côté 8).
- Si $a > 8$: le produit des racines est négatif, donc une seule racine positive : un seul triangle.

Pour $a = 4\sqrt{3}$, $AB = 4$ et $AB^2 + BC^2 = 16 + 48 = 64 = AC^2$: le triangle est rectangle en B (la distance de C à la droite (AB) est alors $AC \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$, exactement BC).

Conclusion : 0 triangle si $a < 4\sqrt{3}$; 1 si $a = 4\sqrt{3}$ (rectangle en B) ; 2 si $4\sqrt{3} < a < 8$; 1 si $a \geq 8$. Ici $a = 7$ est bien dans le cas à deux triangles ($4\sqrt{3} \approx 6,93$).

D7.

1. Comme $a \leq b \leq c$, les inégalités $a + c > b$ et $b + c > a$ sont automatiques (car $c \geq b$ et $c \geq a$, avec $a, b, c > 0$). Il reste l'inégalité triangulaire $a + b > c$; si elle est stricte, le triangle est non aplati.
2. Al-Kashi donne $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$, donc $\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ avec $2ab > 0$. Ainsi $\cos \hat{C} < 0 \iff c^2 > a^2 + b^2$ (angle obtus) et $\cos \hat{C} = 0 \iff c^2 = a^2 + b^2$ (angle droit). Si $c^2 < a^2 + b^2$, $\hat{C}$ est aigu ; or $\hat{C}$ est le plus grand angle (opposé au plus grand côté), donc $\hat{A} \leq \hat{C}$ et $\hat{B} \leq \hat{C}$ sont aigus aussi : le triangle est acutangle.

3. Les triangles obtusangles sont ceux où $c^2 > a^2 + b^2$: $(2, 2, 3)$ car $9 > 8$; $(2, 3, 4)$ car $16 > 13$; $(2, 4, 5)$ car $25 > 20$; $(3, 3, 5)$ car $25 > 18$. Le seul triangle rectangle est $(3, 4, 5)$. Les autres sont acutangles : $22 - 4 - 1 = 17$.

Conclusion : classer(5) renvoie (17, 1, 4).

```
4. def pythagore(n):
    liste = []
    for c in range(1, n + 1):
        for b in range(1, c + 1):
            for a in range(1, b + 1):
                if a * a + b * b == c * c:
                    liste.append((a, b, c))
    return liste
```

(Dans ce cas, $a + b > c$ est automatique : $(a + b)^2 > a^2 + b^2 = c^2$.) Pour $n = 13$, les triplets sont $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$ et $(5, 12, 13)$.

Conclusion : pythagore(13) renvoie [(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13)].

D8.

1. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Donc $AB^2 = 80$, $BC^2 = 80$, $CA^2 = 32$: $AB = BC = 4\sqrt{5}$ et $CA = 4\sqrt{2}$. Aucune somme de deux carrés ne vaut le troisième ($80 + 32 \neq 80$, $80 + 80 \neq 32$), donc le triangle n'est pas rectangle.

Conclusion : ABC est isocèle en B, non rectangle.

- b) $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 32 + 32 = 64$. Alors $\cos \widehat{ABC} = \frac{64}{4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$.

Conclusion : $\widehat{ABC} \approx 36,9^\circ$.

- c) $\widehat{ABC} \in]0^\circ; 180^\circ[$ donc $\sin \widehat{ABC} > 0$ et $\sin^2 \widehat{ABC} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$: $\sin \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$. Aire = $\frac{1}{2} BA \times BC \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \times 80 \times \frac{3}{5} = 24$.

Conclusion : l'aire du triangle ABC vaut 24 unités d'aire.

2. $I \left(\frac{-3+1}{2}; \frac{1+5}{2} \right) = (-1; 3)$. Avec les coordonnées : $\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $BI^2 = 72$. Avec la médiane (dans

le triangle BAC) : $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2}$, soit $160 = 2BI^2 + 16$, donc $BI^2 = 72$.

Conclusion : $I(-1; 3)$ et $BI^2 = 72$ par les deux méthodes.

3. a) Théorème de la médiane : $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} = 2MI^2 + 16$. Donc $MA^2 + MC^2 = 160 \Leftrightarrow MI^2 = 72 \Leftrightarrow MI = 6\sqrt{2}$. Comme $BI^2 = 72$, on a $B \in \Gamma$.

Conclusion : Γ est le cercle de centre $I(-1; 3)$ et de rayon $6\sqrt{2}$, et il passe par B.

- b) Équation de Γ : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 72$. La tangente en B est la droite passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$: $M(x; y)$ est sur la tangente si et seulement si $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$, soit $6(x-5) - 6(y+3) = 0$, c'est-à-dire $x - y - 8 = 0$.

Conclusion : $\Gamma : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 72$; tangente en B : $x - y - 8 = 0$. (Contrôle : $5 - (-3) - 8 = 0$.)

- c) (AC) passe par A avec le vecteur directeur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$: son équation est $y = x + 4$ (vérifiée par A et C). En remplaçant dans $\Gamma : (x+1)^2 + (x+1)^2 = 72$, soit $(x+1)^2 = 36$, donc $x = 5$ ou $x = -7$.

Conclusion : $P(5; 9)$ et $Q(-7; -3)$. Rectangle en B, première façon : $\overrightarrow{BP} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BQ} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$. Seconde façon : I est le milieu de $[PQ]$ (les points P et Q sont symétriques par rapport à I sur la droite (AC) , car $(x_P + x_Q)/2 = -1$ et $(y_P + y_Q)/2 = 3$), donc $[PQ]$ est un diamètre de Γ et $B \in \Gamma$: d'après la propriété du cercle de diamètre $[PQ]$, $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = BI^2 - \frac{PQ^2}{4} = 72 - 72 = 0$.

Conclusion : le triangle BPQ est rectangle en B (et non aplati car $B \notin (AC)$: $-3 \neq 5 + 4$).