

Produit scalaire

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Sauf indication contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice B1 : Produit scalaire avec les coordonnées

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
3. Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ de deux façons différentes.
4. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?
5. Donner un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

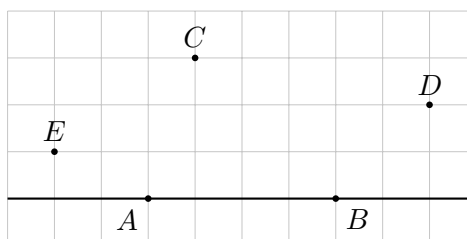
Exercice B2 : Produit scalaire avec les normes et l'angle

On donne $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 30° , puis 90° , puis 135° , puis 180° .
2. Pour $\theta = 90^\circ$, calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
3. Pour quelle valeur de $\theta \in [0^\circ ; 180^\circ]$ a-t-on $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$?

Exercice B3 : Projeté orthogonal

Sur le quadrillage ci-dessous, formé de carrés de côté 1, on a placé les points A , B , C , D et E .



1. Lire sur la figure les projetés orthogonaux C' , D' et E' de C , D et E sur la droite (AB) .
2. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.
3. Retrouver ces trois résultats avec les coordonnées dans le repère orthonormé d'origine A dont l'axe des abscisses est la droite (AB) (unité : un côté de carreau).

Exercice B4 : Règles de calcul

1. On suppose $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$. Calculer :
 - a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$;
 - b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$;
 - c) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v})$;
 - d) $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\|^2$;
 - e) $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
2. On suppose maintenant $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à l'aide de la définition par les normes, puis l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice B5 : Orthogonalité

1. On donne $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; -1)$ et $C(5 ; 5)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
2. Soit m un réel, $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m-4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3. Une droite d a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et une droite d' a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Les droites d et d' sont-elles perpendiculaires ?

Exercice B6 : Formule d'Al-Kashi

1. Dans un triangle ABC , on donne $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculer BC (valeur exacte, puis valeur approchée au centième).
2. Un triangle ABC vérifie $BC = 4$, $CA = 5$ et $AB = 6$. Calculer $\cos \widehat{A}$, $\cos \widehat{B}$ et $\cos \widehat{C}$, puis les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ au dixième de degré. Vérifier que leur somme vaut 180° .

Exercice B7 : Médiane et aire

1. Dans un triangle ABC , on donne $AB = 5$, $AC = 9$ et $BC = 8$. Soit I le milieu de $[BC]$. Calculer AI .
2. Dans un triangle ABC , on donne $AB = 6$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Calculer l'aire du triangle ABC .
3. Soit $[AB]$ un segment de longueur 4 et I son milieu. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$.

Exercice B8 : Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant (un contre-exemple suffit pour une affirmation fausse).

1. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
4. Si $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq 6$.
5. Si ABC est un triangle équilatéral de côté a , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.
6. Si ABC est un triangle équilatéral de côté a , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Exercice B9 : Python : produit scalaire et angle

On considère le programme suivant, où un vecteur est représenté par un couple de nombres.

```
from math import sqrt, acos, degrees
```

```
def ps(u, v):
    return u[0] * v[0] + u[1] * v[1]
```

```
def norme(u):
    return sqrt(ps(u, u))
```

```
def angle(u, v):
    return degrees(acos(ps(u, v) / (norme(u) * norme(v))))
```

1. Que renvoie `ps((2, 5), (-3, 4))` ? Que renvoie `norme((3, 4))` ?
2. Que représente la valeur renvoyée par `angle((1, 0), (1, 1))` ? Donner sa valeur exacte.
3. Écrire une fonction `orthogonaux(u, v)` qui renvoie `True` si les vecteurs u et v sont orthogonaux et `False` sinon.
4. Écrire une fonction `rectangle_en_B(A, B, C)` qui renvoie `True` si le triangle ABC est rectangle en B , les points étant donnés par leurs coordonnées.

Exercice B10 : Droites et cercles en repère

1. La droite d a pour équation $3x - 2y + 5 = 0$. Donner un vecteur normal à d et un vecteur directeur de d . Le point $E(1; 4)$ appartient-il à d ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Les droites d'équations $2x + 3y - 1 = 0$ et $6x - 4y + 7 = 0$ sont-elles perpendiculaires?
4. Donner une équation du cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon 4. Le point $F(3; 2)$ appartient-il à ce cercle? Le point $O(0; 0)$?
5. Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :
 - a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;
 - b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
 - c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$.

Exercice B11 : Logique et géométrie

1. On considère l'implication : « si le triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ». Énoncer sa réciproque et sa contraposée. Ces trois propositions sont-elles vraies? (On justifiera la réciproque avec la formule d'Al-Kashi.)
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on pose $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(4; 0)$ et $D(1; -1)$. Montrer que les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires et que $ABCD$ n'est pas un losange. Pour un quadrilatère, « être un losange » est-il une condition nécessaire, une condition suffisante, ou les deux, pour avoir des diagonales perpendiculaires?
3. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 6$.
4. Soit $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$ et $M(x; 0)$ un point de l'axe des abscisses. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. En distinguant les cas $x < -2$, $-2 \leq x \leq 2$ et $x > 2$, montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 0$ si et seulement si M appartient au segment $[AB]$.
5. Préciser le statut de chaque égalité (identité ou équation) et celui des lettres (variable, inconnue ou paramètre) :
 - a) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$;
 - b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;
 - c) $2x + my - 3 = 0$, où m est un réel fixé.