

Corrigé : Produit scalaire**Fiche Bases****B1.**

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 5 \times 4 = -6 + 20 = 14 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 4 + 5 \times (-1) = 8 - 5 = 3.$$

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 14$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3$.

$$2. \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$3. \text{ Première façon : } \vec{v} + \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 2 \times 1 + 5 \times 3 = 17. \text{ Seconde façon (distributivité) :}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 14 + 3 = 17.$$

Conclusion : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 17$.

$$4. \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3) \times 4 + 4 \times (-1) = -12 - 4 = -16 \neq 0.$$

Conclusion : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

$$5. \text{ Un vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ si et seulement si } 2a + 5b = 0. \text{ Avec } a = 5 \text{ et } b = -2 : 10 - 10 = 0.$$

Conclusion : par exemple $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ (tout vecteur non nul proportionnel à celui-ci convient).

B2. On utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ avec $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = 10$.

$$1. 30^\circ : 10 \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}. \quad 90^\circ : 10 \cos 90^\circ = 0.$$

$$135^\circ : 10 \cos 135^\circ = 10 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5\sqrt{2}. \quad 180^\circ : 10 \cos 180^\circ = -10.$$

Conclusion : $5\sqrt{3}$; 0; $-5\sqrt{2}$; -10 .

$$2. \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 25 + 0 + 4 = 29.$$

$$3. 10 \cos \theta = 5 \text{ donne } \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ donc } \theta = 60^\circ \text{ dans } [0^\circ; 180^\circ].$$

B3.

1. La droite (AB) est la droite horizontale passant par A : C' est le point situé à 1 carreau à droite de A , D' à 6 carreaux à droite de A , E' à 2 carreaux à gauche de A .

2. On a $AB = 4$.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens, $AC' = 1 : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} = 4 \times 1 = 4$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD'}$ sont de même sens, $AD' = 6 : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} = 4 \times 6 = 24$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE'}$ sont de sens contraires, $AE' = 2 : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE'} = -4 \times 2 = -8$.

$$3. \text{ Dans le repère indiqué : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 0 \times 3 = 4,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 6 = 24 \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 4 \times (-2) = -8.$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 24$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -8$ (les deux méthodes concordent).

B4.

$$1. \text{ a) } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 16 + 2 \times 5 + 9 = 35 \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 16 - 2 \times 5 + 9 = 15.$$

$$\text{ b) } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 16 - 9 = 7.$$

$$\text{ c) } (2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + 6\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - 3\|\vec{v}\|^2 = 32 + 30 - 5 - 27 = 30.$$

$$\text{ d) } \|3\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 144 - 60 + 36 = 120.$$

$$\text{ e) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{12}.$$

$$2. \text{ Par définition, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (49 - 9 - 25) = \frac{15}{2}. \text{ Puis } \cos \theta = \frac{15/2}{3 \times 5} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{15}{2}$ et l'angle vaut 60° .

B5.

1. $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -12 + 12 = 0$.

Conclusion : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$, donc le triangle ABC est rectangle en B .

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = m(m-4) + 3 = m^2 - 4m + 3$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $m^2 - 4m + 3 = 0$.

Ici $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $m = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $m = \frac{4+2}{2} = 3$.

Conclusion : $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $m = 1$ ou $m = 3$.

3. $3 \times 2 + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$.

Conclusion : les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les droites d et d' sont perpendiculaires.

B6.

1. D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 28$.

Conclusion : $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5,29$.

2. Avec $a = BC = 4$, $b = CA = 5$, $c = AB = 6$: $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 36 - 16}{60} = \frac{3}{4}$,
 $\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 25}{48} = \frac{9}{16}$, $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{1}{8}$.

Donc $\widehat{A} \approx 41,4^\circ$, $\widehat{B} \approx 55,8^\circ$, $\widehat{C} \approx 82,8^\circ$. Somme : $41,4 + 55,8 + 82,8 = 180,0$.

Conclusion : les angles mesurent environ $41,4^\circ$, $55,8^\circ$ et $82,8^\circ$, de somme 180° .

B7.

1. Théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$, soit $25 + 81 = 2 AI^2 + 32$. Donc $AI^2 = 37$.

Conclusion : $AI = \sqrt{37} \approx 6,08$.

2. Aire = $\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$.

Conclusion : l'aire vaut 7,5 unités d'aire.

3. Théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 MI^2 + 8$. Alors $MA^2 + MB^2 = 26 \iff 2 MI^2 = 18 \iff MI = 3$.

Conclusion : c'est le cercle de centre I et de rayon 3.

B8.

1. **Faux.** Dans un repère orthonormé, $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non nuls et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

2. **Vrai.** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, donc l'égalité équivaut à $2 \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire à $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3. **Faux.** Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 = \vec{u} \cdot \vec{w}$ mais $\vec{v} \neq \vec{w}$.

4. **Vrai.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos \theta = 6 \cos \theta \leq 6$ car $\cos \theta \leq 1$ (et le résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul).

5. **Vrai.** L'angle $\widehat{BAC}$ vaut 60° : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

6. **Faux.** L'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ vaut 120° (les vecteurs ne partent pas du même point : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

B9.

1. `ps((2, 5), (-3, 4))` renvoie $2 \times (-3) + 5 \times 4 = 14$. `norme((3, 4))` renvoie $\sqrt{9 + 16} = 5$ (soit 5.0).

2. La fonction renvoie la mesure en degrés de l'angle entre les deux vecteurs : $\arccos \frac{1}{1 \times \sqrt{2}}$, soit 45 .

(à l'arrondi des flottants près).

3. **def** orthogonaux(u, v):

return ps(u, v) == 0

4. On forme $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis on teste la nullité de leur produit scalaire :

def rectangle_en_B(A, B, C):

 BA = (A[0] - B[0], A[1] - B[1])

 BC = (C[0] - B[0], C[1] - B[1])

return ps(BA, BC) == 0

Par exemple `rectangle_en_B((-2, 1), (2, -1), (5, 5))` renvoie `True` (exercice B5).

B10.

1. Les coefficients de x et y donnent un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; un vecteur directeur est $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (on a bien $\vec{n} \cdot \vec{d} = 6 - 6 = 0$). Pour $E : 3 \times 1 - 2 \times 4 + 5 = 0$.

Conclusion : $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal, $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est directeur, et $E \in d$.

2. $M(x; y) \in \Delta \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x - 2) + 3(y + 1) = 0 \iff 4x + 3y - 5 = 0$.

Conclusion : Δ a pour équation $4x + 3y - 5 = 0$.

3. Des vecteurs normaux sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, de produit scalaire $12 - 12 = 0$.

Conclusion : ces vecteurs normaux sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires.

4. $M(x; y)$ est sur le cercle si et seulement si $\Omega M^2 = 16$. Pour $F : 0^2 + 4^2 = 16$. Pour $O : 3^2 + (-2)^2 = 13 \neq 16$.

Conclusion : équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$; F appartient au cercle, pas O .

5. On met sous forme canonique : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ et $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$. Avec c le terme constant, l'équation s'écrit donc $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - c$.

a) $c = -4 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$: cercle de centre $(2; -1)$ et de rayon 3.

b) $c = 5 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$: un seul point, $(2; -1)$.

c) $c = 6 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -1$: impossible, ensemble vide.

Conclusion : cercle de rayon 3 ; le point $(2; -1)$; l'ensemble vide.

B11.

1. *Réciproque : « si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ». Contraposée : « si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A ». L'implication directe est le théorème de Pythagore : elle est vraie, donc sa contraposée aussi (une implication et sa contraposée sont équivalentes). Pour la réciproque, la formule d'Al-Kashi donne $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \widehat{BAC}$. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors $2 AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 0$; comme $AB \neq 0$ et $AC \neq 0$, $\cos \widehat{BAC} = 0$, donc $\widehat{BAC} = 90^\circ$: la réciproque est vraie.*

2. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$: les diagonales sont perpendiculaires. Mais $AB^2 = 1 + 4 = 5$ et $BC^2 = 9 + 4 = 13$: les côtés consécutifs $[AB]$ et $[BC]$ n'ont pas la même longueur, donc $ABCD$ n'est pas un losange. Un losange a ses diagonales perpendiculaires : « être un losange » est donc une condition suffisante. Elle n'est pas nécessaire, puisque $ABCD$ a des diagonales perpendiculaires sans être un losange (contre-exemple).

3. Supposons qu'un tel triangle existe. La formule d'Al-Kashi donne $36 = 4 + 9 - 12 \cos \widehat{BAC}$, soit $\cos \widehat{BAC} = -\frac{23}{12}$. Or $\frac{23}{12} > 1$, ce qui contredit $-1 \leq \cos \widehat{BAC} \leq 1$. L'hypothèse est absurde : un tel triangle n'existe pas.

4. $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -2 - x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 2 - x \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-2 - x)(2 - x) = x^2 - 4$.

- Si $x < -2$: $x^2 > 4$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0$ et $M \notin [AB]$.
- Si $-2 \leq x \leq 2$: $x^2 \leq 4$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 0$ et $M \in [AB]$.
- Si $x > 2$: $x^2 > 4$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0$ et $M \notin [AB]$.

Dans les trois cas, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 0 \iff M \in [AB]$.

5. a) Identité (vraie pour tous les points A, B, C, D) : A, B, C, D sont des variables.
b) Équation : x et y sont les inconnues, et l'ensemble de ses solutions $(x; y)$ est un cercle.
c) Équation (d'une droite) : x et y sont les inconnues, m est un paramètre.

Conclusion : réciproque et contraposée vraies ; « losange » est suffisante, non nécessaire ; pas de triangle de côtés 2, 3, 6 ; $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 4 \leq 0 \iff x \in [-2; 2]$.