

Fiche 3 : théorèmes de la médiane et d'Al-Kashi

Six exercices pour maîtriser **Al-Kashi**, le milieu I et le projeté orthogonal :

- longueur avec Al-Kashi ;
- angles d'un triangle de côtés donnés ;
- longueur d'une médiane et ensemble de points avec le milieu I ;
- projeté orthogonal, hauteur et aire ;
- un problème d'arpentage ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule** (Al-Kashi, produit scalaire, Pythagore) est **écrite** avec le bon triangle ;
- les **valeurs** sont remplacées ligne par ligne ;
- les **unités** et les **arrondis** sont précisés.

Le modèle de rédaction pour Al-Kashi

« Dans le triangle ABC , d'après la formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \hat{A} = 25 + 49 - 70 \cos 60^\circ = 39$. Donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,2$. »

- **Nomme le triangle** et le théorème.
- **Écris la formule** avec les lettres, puis avec les valeurs.
- **Conclus** avec l'unité et l'arrondi.

Les pièges classiques

- Utiliser le **mauvais angle** (celui qui n'est pas entre les deux côtés).
- Oublier la **racine carrée** à la fin.
- Calculer avec la calculatrice en **radians**.
- Utiliser les calculs du milieu avec un point qui **n'est pas le milieu**.

Al-Kashi, c'est Pythagore qui a enfin le droit de se tromper d'angle.

Exercice 1 (★) : Al-Kashi

Dans un triangle ABC , $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

1. Calculer BC (valeur exacte puis arrondie au centième).
2. Calculer l'aire du triangle (on pourra utiliser le projeté orthogonal H de C sur (AB)).
3. Calculer $\widehat{ABC}$ à $0,1^\circ$ près.

Correction de l'exercice 1

Question 1

D'après la formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \hat{A}$.

$$BC^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = 74 - 70 \times \frac{1}{2} = 39.$$

$$BC = \sqrt{39} \approx 6,24.$$

Question 2

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$$

Ce produit est positif : H est du même côté de A que B et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$. Donc $AH = \frac{35/2}{5} = \frac{7}{2}$.

Dans le triangle AHC rectangle en H : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 49 - \frac{49}{4} = \frac{147}{4}$, donc $CH = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Aire} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,16 \text{ unités d'aire.}$$

Question 3

$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{25 + 39 - 49}{2 \times 5 \times \sqrt{39}} = \frac{15}{10\sqrt{39}}.$$

$$\cos \hat{B} \approx 0,2402.$$

$$\widehat{ABC} \approx 76,1^\circ.$$

Exercice 2 (★★) : les trois angles

Un triangle ABC a pour côtés $BC = 5$, $CA = 6$ et $AB = 7$.

1. Calculer $\cos \hat{A}$ puis $\hat{A}$ (arrondi au dixième de degré).
2. Calculer de même $\hat{B}$.
3. En déduire $\hat{C}$ et vérifier avec Al-Kashi.
4. Vérifier ces trois angles avec le script Python suivant et donner ce qu'il affiche :

```
from math import acos, degrees

def angle(a, b, c):
    """Angle opposé au côté a, en degrés (formule d'Al-Kashi)."""
    return degrees(acos((b**2 + c**2 - a**2) / (2 * b * c)))

a, b, c = 5, 6, 7 # BC, CA, AB
A = angle(a, b, c)
B = angle(b, a, c)
C = angle(c, a, b)
print(round(A, 1), round(B, 1), round(C, 1), round(A + B + C, 1))
```

Correction de l'exercice 2

Question 1

D'après Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \hat{A}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \times 7 \times 6} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}.$$

$$\cos \hat{A} = \frac{5}{7}, \text{ donc } \hat{A} \approx 44,4^\circ.$$

Question 2

$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{49 + 25 - 36}{2 \times 7 \times 5} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

$$\hat{B} \approx 57,1^\circ.$$

Question 3

La somme des angles vaut 180° : $\hat{C} \approx 180 - 44,4 - 57,1 \approx 78,5^\circ$.

$$\text{Vérification : } \cos \hat{C} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \times BC \times CA} = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{12}{60} = 0,2.$$

$\arccos(0,2) \approx 78,5^\circ$: c'est cohérent.

$$\hat{C} \approx 78,5^\circ.$$

Question 4

La fonction **angle** applique $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ au côté opposé à l'angle cherché, puis convertit en degrés.

Le script affiche 44.4 57.1 78.5 180.0.

Les trois angles et leur somme confirment les calculs à la main.

Exercice 3 (★★) : la médiane et le milieu I

1. Dans un triangle ABC , I est le milieu de $[BC]$. Montrer que $4 AI^2 = 2 AB^2 + 2 AC^2 - BC^2$. (On pourra écrire $2 \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.)
2. Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. Calculer la longueur de la médiane $[AI]$ issue de A .
3. Dans un triangle ABC , $AB = 7$, $AC = 9$ et $BC = 8$. Calculer AI , où I est le milieu de $[BC]$.
4. $[AB]$ est un segment de longueur 10 et I son milieu. Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + 50$ pour tout point M , puis déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 70$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Comme I est le milieu de $[BC]$, $2 \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. En prenant le carré : $4 AI^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

D'autre part, $BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc $2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$.

On remplace : $4 AI^2 = AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2$.

$$4 AI^2 = 2 AB^2 + 2 AC^2 - BC^2.$$

Question 2

$$4 AI^2 = 2 \times 36 + 2 \times 64 - 100 = 100, \text{ donc } AI^2 = 25.$$

$AI = 5$ (c'est la moitié de l'hypoténuse : le triangle est rectangle en A car $36 + 64 = 100$).

Question 3

$$4 AI^2 = 2 \times 49 + 2 \times 81 - 64 = 98 + 162 - 64 = 196, \text{ donc } AI^2 = 49.$$

$$AI = 7.$$

Question 4

On introduit I : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

$$MA^2 + MB^2 = (MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2) + (MI^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2) = 2MI^2 + 2IA^2.$$

Comme $IA = \frac{AB}{2} = 5$: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 50$.

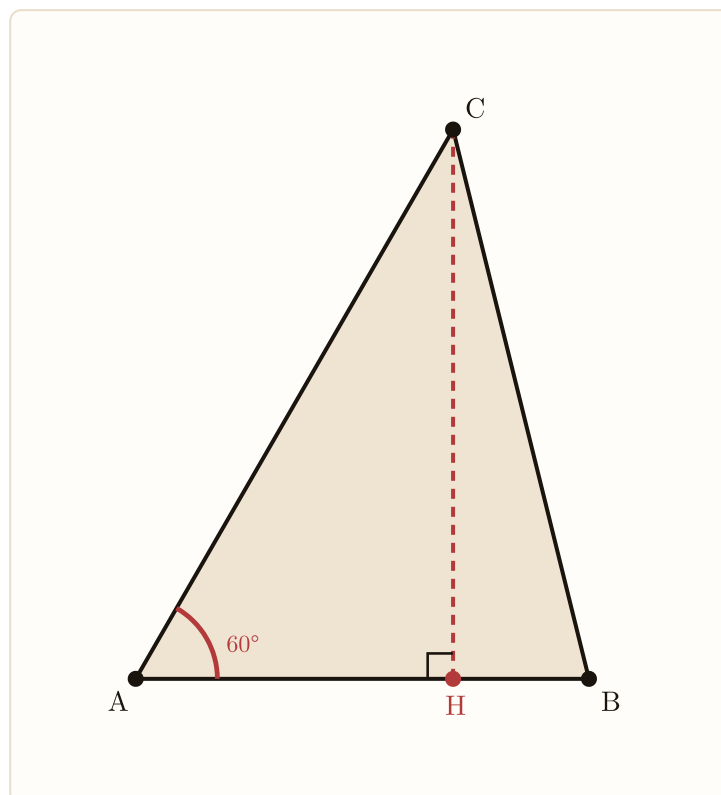
$$MA^2 + MB^2 = 70 \iff 2MI^2 = 20 \iff MI^2 = 10 \iff MI = \sqrt{10}.$$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10}$.

Exercice 4 (★★) : projeté orthogonal, hauteur et aire

On reprend le triangle ABC de l'exercice 1 : $AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ et $BC = \sqrt{39}$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis AH . Le point H est-il sur le segment $[AB]$?
2. Calculer CH (valeur exacte) puis l'aire du triangle ABC .
3. Calculer la hauteur issue de A (arrondie au centième).
4. Calculer BH puis $\cos \widehat{ABC}$ dans le triangle BHC rectangle en H . Comparer avec l'exercice 1.



H est le projeté orthogonal de C sur (AB) : $AH = 7/2$ et $CH = 7\sqrt{3}/2$

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = \frac{35}{2}, \text{ positif : } H \text{ est du même côté de } A \text{ que } B.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ donc } AH = \frac{35/2}{5} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{35}{2} \text{ et } AH = \frac{7}{2}. \text{ Comme } 0 < AH < AB = 5, H \text{ est sur le segment } [AB].$$

Question 2

$$\text{Dans le triangle } AHC \text{ rectangle en } H : CH^2 = AC^2 - AH^2 = 49 - \frac{49}{4} = \frac{147}{4}, \text{ donc } CH = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}.$$

$$CH = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6,06 \text{ et aire} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \approx 15,16 \text{ unités d'aire.}$$

Question 3

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times BC \times h, \text{ donc } h = \frac{2 \times \text{Aire}}{BC} = \frac{\frac{35\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{39}} = \frac{35}{2\sqrt{13}}.$$

$$h \approx 4,85 \text{ unités.}$$

Question 4

$$H \text{ est sur } [AB] \text{ donc } BH = AB - AH = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}.$$

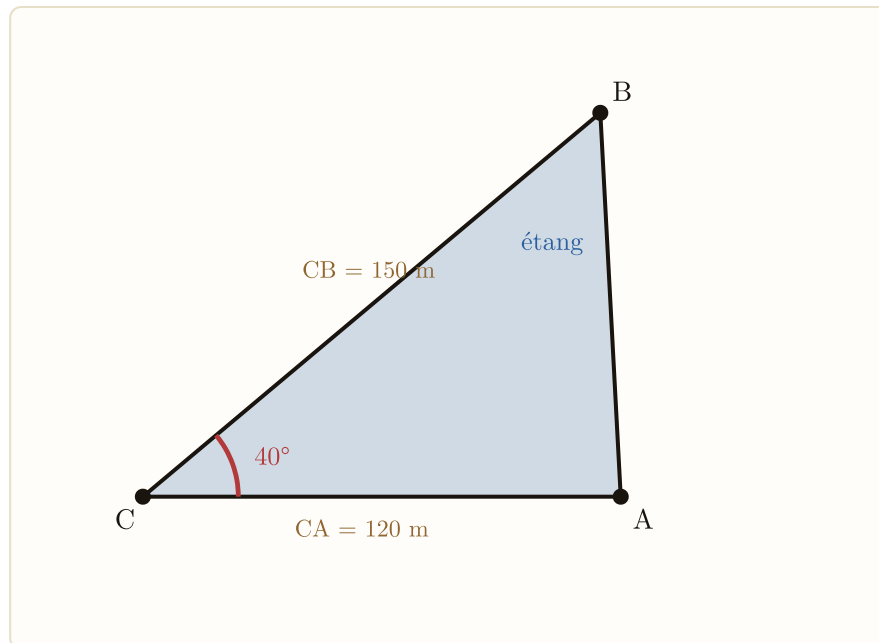
$$\text{Dans le triangle } BHC \text{ rectangle en } H : \cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{BC} = \frac{3/2}{\sqrt{39}} = \frac{3}{2\sqrt{39}}.$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{2\sqrt{39}} \approx 0,2402 : \text{ c'est la valeur } \frac{15}{10\sqrt{39}} \text{ de l'exercice 1.}$$

Exercice 5 (★★★) : mesurer une distance inaccessible

Pour mesurer la distance AB entre deux points séparés par un étang, on se place en un point C d'où l'on mesure : $CA = 120$ m, $CB = 150$ m et $\widehat{ACB} = 40^\circ$.

1. Calculer AB à 0,1 m près.
2. Calculer l'aire du triangle ABC (arrondie au m^2) à l'aide du projeté orthogonal H de B sur (CA) .
3. Quelle est l'influence sur AB d'une erreur de 1° sur l'angle $\widehat{ACB}$? (On donnera la valeur de AB pour 41° .)



Mesure d'une distance inaccessible AB à travers un étang

Correction de l'exercice 5**Question 1**

D'après Al-Kashi dans ABC : $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 CA \times CB \times \cos \widehat{C}$.

$$AB^2 = 120^2 + 150^2 - 2 \times 120 \times 150 \times \cos 40^\circ = 36\,900 - 36\,000 \cos 40^\circ \approx 9322.$$

$$AB \approx 96,6 \text{ m.}$$

Question 2

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 120 \times 150 \times \cos 40^\circ > 0$: H est du même côté de C que A , et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CH$.

$$\text{Donc } CH = \frac{120 \times 150 \times \cos 40^\circ}{120} = 150 \cos 40^\circ \approx 114,9 \text{ m.}$$

Dans le triangle BHC rectangle en H : $BH^2 = CB^2 - CH^2$, donc $BH \approx 96,4$ m (valeurs non arrondies dans le calcul).

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \times CA \times BH \approx \frac{1}{2} \times 120 \times 96,4.$$

$$\text{Aire} \approx 5785 \text{ m}^2.$$

Question 3

Avec 41° : $AB^2 = 36\,900 - 36\,000 \cos 41^\circ$, soit $AB \approx 98,6$ m.

L'écart est d'environ 2,1 m pour 1° d'erreur, soit environ 2 % de AB .

Une erreur d'un degré sur l'angle change AB d'environ 2 m, soit environ 2 % : l'effet reste modéré.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Dans un triangle rectangle en A , la formule d'Al-Kashi se réduit au théorème de Pythagore.
2. Dans tout triangle, la médiane issue de A mesure $\frac{BC}{2}$.
3. Un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 est rectangle.
4. Dans un triangle, si $a^2 > b^2 + c^2$, alors $\hat{A}$ est obtus.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$ et $a^2 = b^2 + c^2$.**Vrai.**

Affirmation 2

Contre-exemple : avec $AB = 7$, $AC = 9$, $BC = 8$, on a $AI = 7 \neq 4$. C'est vrai seulement si le triangle est rectangle en A .**Faux.**

Affirmation 3

 $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$: réciproque de Pythagore.**Vrai.**

Affirmation 4

 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ donc $a^2 > b^2 + c^2 \iff \cos \hat{A} < 0 \iff \hat{A}$ obtus.**Vrai.****Ce qui peut tomber en contrôle**

- Calculer une longueur avec Al-Kashi (exercices 1 et 5).
- Calculer les angles d'un triangle dont on connaît les côtés (exercice 2).
- Utiliser le milieu I pour une médiane ou un ensemble de points (exercice 3).
- Calculer une aire et une hauteur avec le projeté orthogonal (exercices 1, 4 et 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans un triangle ABC , la formule d'Al-Kashi donne $BC^2 =$:

- A. $AB^2 + AC^2$
- B. $AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \hat{A}$ (bonne réponse)
- C. $AB^2 + AC^2 + 2 AB \times AC \cos \hat{A}$
- D. $(AB + AC)^2$

Justification : C'est la formule d'Al-Kashi, avec l'angle $\hat{A}$ entre AB et AC .

2. Dans un triangle, $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Alors $\cos \hat{A} =$:

- A. $\frac{5}{7}$ (bonne réponse)
- B. $\frac{19}{35}$
- C. $\frac{1}{5}$
- D. $\frac{60}{25}$

Justification : $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{84} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}$.

3. Soit I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$:

- A. $MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (bonne réponse)
- B. $MI^2 + \frac{AB^2}{4}$
- C. $MI^2 - \frac{AB^2}{2}$
- D. $2 MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Justification : On écrit $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$: le produit vaut $MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

4. Dans un triangle ABC , le projeté orthogonal H de C sur (AB) est du même côté de A que B , avec $AB = 6$ et $AH = 2$. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$:

- A. 12 (bonne réponse)
- B. -12
- C. 8
- D. 4

Justification : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 6 \times 2 = 12$.

5. Dans un triangle rectangle en A , la formule d'Al-Kashi donne :

- A. le théorème de Thalès
- B. le théorème de Pythagore (bonne réponse)

C. la formule des sinus

D. rien de particulier

Justification : $\cos 90^\circ = 0$: $a^2 = b^2 + c^2$.