

Fiche 2 : orthogonalité et angles

Sept exercices pour maîtriser l'orthogonalité et les angles :

- prouver qu'un triangle est rectangle ;
- déterminer un paramètre pour que deux vecteurs soient orthogonaux ;
- ensembles de points M ;
- hauteurs et orthocentre ;
- démonstration dans un losange ;
- ensemble de points $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'orthogonalité est prouvée avec un **produit scalaire nul** ;
- les **coordonnées** sont calculées ligne par ligne ;
- la **conclusion** nomme l'angle droit ou le point cherché.

Le modèle de rédaction pour prouver un angle droit

« $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 - 4 = 0$. Donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$: le triangle ABC est rectangle en B . »

- **Calcule** les coordonnées des deux vecteurs qui partent du même sommet.
- **Écris** le produit scalaire.
- **Conclus** : « donc l'angle en B est droit ».

Les pièges classiques

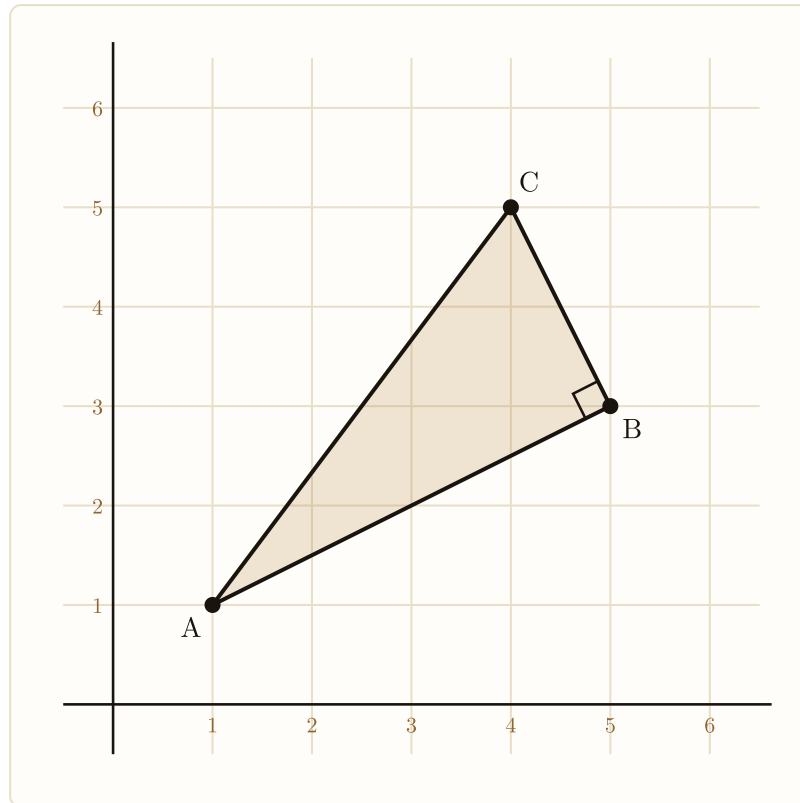
- Prendre deux vecteurs qui ne partent **pas du même sommet**.
- Conclure « rectangle » alors que le produit n'est pas nul (une erreur de signe suffit).
- Oublier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ décrit une **droite**, pas un point.
- Confondre « vecteurs orthogonaux » et « vecteurs colinéaires ».

Si ton produit scalaire fait **0,0001**, ce n'est pas un angle droit : c'est un angle de quelqu'un qui n'a pas arrondi.

Exercice 1 (★) : un triangle rectangle

Dans un repère orthonormé, $A(1; 1)$, $B(5; 3)$ et $C(4; 5)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
3. Retrouver ce résultat avec la réciproque du théorème de Pythagore.



Le triangle ABC est rectangle en B

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1-5 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4-5 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Question 2

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4) \times (-1) + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux : le triangle ABC est rectangle en B .

Question 3

$$AB^2 = 16 + 4 = 20, BC^2 = 1 + 4 = 5 \text{ et } AC^2 = (4-1)^2 + (5-1)^2 = 9 + 16 = 25.$$

$AB^2 + BC^2 = 25 = AC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en B .

On retrouve : ABC est rectangle en B .

Exercice 2 (★★) : un paramètre

Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ m-1 \end{pmatrix}$, où m est un réel.

1. Pour quelle valeur de m les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
2. Pour quelle valeur de m sont-ils colinéaires ?
3. Peut-il exister m pour lequel $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont à la fois orthogonaux et colinéaires ?

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2m + 3(m-1) = 5m - 3.$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff 5m - 3 = 0 \iff m = \frac{3}{5}.$$

Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $m = \frac{3}{5}$.

Question 2

Colinéaires $\iff$ déterminant nul : $m(m-1) - 3 \times 2 = 0$, soit $m^2 - m - 6 = 0$.

$$\Delta = 1 + 24 = 25 : m = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ ou } m = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $m = -2$ ou $m = 3$.

Question 3

Orthogonaux : $m = \frac{3}{5}$. Colinéaires : $m \in \{-2; 3\}$. Ces ensembles n'ont aucune valeur en commun.

Non : il n'existe aucune telle valeur de m (deux vecteurs non nuls ne peuvent pas être à la fois orthogonaux et colinéaires).

Exercice 3 (★★) : ensembles de points

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$ et $B(5; 2)$. On note $M(x; y)$ un point du plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 10$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(x-1), \text{ nul si et seulement si } x = 1.$$

C'est la droite d'équation $x = 1$, perpendiculaire à (AB) passant par A .

Question 2

$$4(x-1) = 10 \iff x-1 = \frac{5}{2} \iff x = \frac{7}{2}.$$

C'est la droite d'équation $x = \frac{7}{2}$, perpendiculaire à (AB) .

Question 3

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-x)(5-x) + (2-y)^2 = x^2 - 6x + 5 + (y-2)^2 = (x-3)^2 - 4 + (y-2)^2.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 : \text{ ce sont les points à la distance } 2 \text{ du point } I(3; 2), \text{ milieu de } [AB].$$

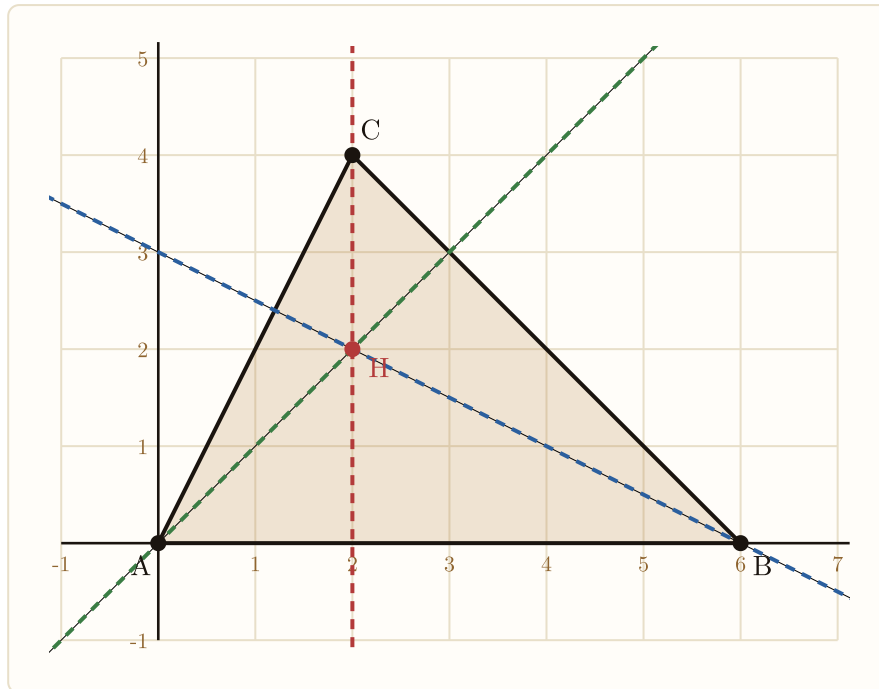
$$\text{On retrouve la propriété du cours : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 4.$$

C'est le **cercle de diamètre** $[AB]$, de centre $I(3; 2)$ et de rayon $\frac{AB}{2} = 2$. Pour M distinct de A et B , l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Exercice 4 (★★★) : hauteurs et orthocentre

Cet exercice illustre la concourance des hauteurs d'un triangle, un approfondissement possible du programme. Dans un repère orthonormé, $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(2; 4)$. On cherche le point $H(x; y)$ intersection des hauteurs.

1. Déterminer l'équation de la hauteur issue de C dans ABC .
2. Écrire que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et en déduire les coordonnées de H .
3. Vérifier que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Que signifie ce résultat ?



Les trois hauteurs du triangle ABC se coupent en $H(2; 2)$, l'orthocentre

Correction de l'exercice 4

Question 1

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$: la droite (AB) est l'axe des abscisses. La hauteur issue de C lui est perpendiculaire.

La hauteur issue de C est la droite d'équation $x = 2$.

Question 2

H est sur la hauteur issue de C : $x = 2$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} x-6 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = -8 + 4y = 0 \iff y = 2.$$

$H(2; 2)$.

Question 3

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -8 + 8 = 0.$$

(AH) est perpendiculaire à (BC) : (AH) est la troisième hauteur. Les trois hauteurs sont concourantes en H : c'est l'**orthocentre** de ABC .

Exercice 5 (★★) : les diagonales du losange

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Exprimer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de AB et AD .
2. En déduire que si $ABCD$ est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires.
3. Réciproquement, que peut-on dire d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2.$$

Question 2

Si $ABCD$ est un losange, $AB = AD$, donc $AD^2 - AB^2 = 0$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 : \text{les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.}$$

Question 3

Si les diagonales sont perpendiculaires, $AD^2 - AB^2 = 0$, donc $AD = AB$.

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un **losange**.

Exercice 6 (★★★) : un ensemble de points $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

$[AB]$ est un segment de longueur 6 et I son milieu. Pour un réel k , on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$.
2. Déterminer $\mathcal{E}_7$.
3. Déterminer $\mathcal{E}_{-9}$ et $\mathcal{E}_{-10}$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2.$$

Comme $IA = \frac{AB}{2} = 3$, on obtient $MI^2 - 9$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9.$$

Question 2

$$MI^2 - 9 = 7 \iff MI^2 = 16 \iff MI = 4.$$

$\mathcal{E}_7$ est le cercle de centre I et de rayon 4.

Question 3

$$MI^2 - 9 = -9 \iff MI = 0 \iff M = I.$$

$$MI^2 - 9 = -10 \iff MI^2 = -1 : \text{impossible.}$$

$$\mathcal{E}_{-9} = \{I\} \text{ et } \mathcal{E}_{-10} = \emptyset.$$

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$, alors l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
2. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est une droite.
3. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, l'angle entre les deux vecteurs (non nuls) est obtus.
4. Deux vecteurs non nuls colinéaires ont un produit scalaire non nul.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} > 0 : \text{l'angle est aigu.}$$

Vrai.

Affirmation 2

C'est le cercle de diamètre $[AB]$, pas une droite.

Faux.

Affirmation 3

$\cos \theta < 0$ donc $\theta \in]90^\circ ; 180^\circ]$: obtus.

Vrai.

Affirmation 4

Colinéaires : l'angle vaut 0° ou 180° , donc $\cos \theta = \pm 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \neq 0$.

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Prouver un angle droit** avec un produit scalaire nul (exercice 1).
- **Trouver un paramètre** d'orthogonalité (exercice 2).
- **Décrire un ensemble de points** M (exercice 3).
- **Hauteurs et orthocentre** (exercice 4).
- **Démontrer** une propriété d'un quadrilatère (exercice 5).
- **Ensemble de points** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec le milieu I (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si :

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$
- B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (**bonne réponse**)
- C. $\vec{u} = \vec{v}$
- D. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Justification : C'est la caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire.

2. Pour prouver que ABC est rectangle en B , on montre que :

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (**bonne réponse**)

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Justification : Les deux vecteurs doivent partir du sommet de l'angle droit, ici B .

3. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

A. une droite

B. **le cercle de diamètre $[AB]$ (bonne réponse)**

C. le milieu de $[AB]$

D. la médiatrice de $[AB]$

Justification : $\widehat{AMB}$ est droit : M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

4. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux pour $m =$:

A. $-\frac{3}{2}$ **(bonne réponse)**

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{8}{3}$

D. $\frac{8}{3}$

Justification : $6 + 4m = 0 \iff m = -\frac{3}{2}$.

5. Dans un losange, les diagonales sont :

A. égales

B. **perpendiculaires (bonne réponse)**

C. parallèles

D. de longueurs doubles des côtés

Justification : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2 = 0$ car $AB = AD$.