

Fiche 1 : calculs de produits scalaires

Huit exercices pour **calculer des produits scalaires** :

- avec les coordonnées ;
- avec les normes et l'angle ;
- avec Chasles ;
- avec le projeté orthogonal ;
- avec les identités remarquables ;
- pour calculer un angle ;
- pour retrouver les coordonnées d'un vecteur ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule utilisée** est écrite ;
- les **vecteurs** sont donnés avec leurs coordonnées ;
- le résultat est un **nombre**, isolé à la fin.

Le modèle de rédaction d'un produit scalaire

« Dans le repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-2) \times 4 = -5$. »

- **Écris les coordonnées** des deux vecteurs.
- **Écris la formule** avec les nombres.
- **Conclus** par un nombre.

Les pièges classiques

- Écrire un vecteur comme résultat.
- Se tromper de signe dans $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Utiliser $xx' + yy'$ dans un repère qui n'est pas orthonormé.
- Oublier le double produit dans $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.

Un produit scalaire, c'est un nombre. Un vecteur dans la réponse, c'est un lapin dans le chapeau : ça surprend, mais ça ne vaut pas de points.

Exercice 1 (★) : avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$.
2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
3. Calculer $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w})$ de deux façons.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 1 + (-2) \times 4 = 3 - 8.$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{13}.$$

Question 2

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times (-2) + (-2) \times (-3) = -6 + 6 = 0.$$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont **orthogonaux**.

Question 3

Première façon (coordonnées). $2\vec{v} - \vec{w} \begin{pmatrix} 2+2 \\ 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$, donc $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w}) = 3 \times 4 + (-2) \times 11 = 12 - 22 = -10$.

Seconde façon (bilinéarité). $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times (-5) - 0 = -10$.

$\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w}) = -10$ (les deux méthodes donnent le même résultat).

Exercice 2 (★) : avec les normes et l'angle

$\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque l'angle géométrique θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut :

1. 60° ;
2. 120° ;
3. 90° ;
4. 0° .
5. Dans le cas 60° , calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.

Correction de l'exercice 2

Les calculs

On utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ avec $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = 12$.

$$60^\circ : 12 \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

$$120^\circ : 12 \cos 120^\circ = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

$$90^\circ : 12 \cos 90^\circ = 0.$$

$$0^\circ : 12 \cos 0^\circ = 12.$$

$$6 ; -6 ; 0 ; 12.$$

Question 5

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 + 2 \times 6 + 16.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 37.$$

Exercice 3 (★★) : avec Chasles et un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB = 6$ et $AD = 4$. Le point M est le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Dans un rectangle, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 36 + 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36.$$

Question 2

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = 16 - 36.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -20.$$

Question 3

$$M \text{ milieu de } [BC] : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ (car } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\text{)}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} AD^2.$$

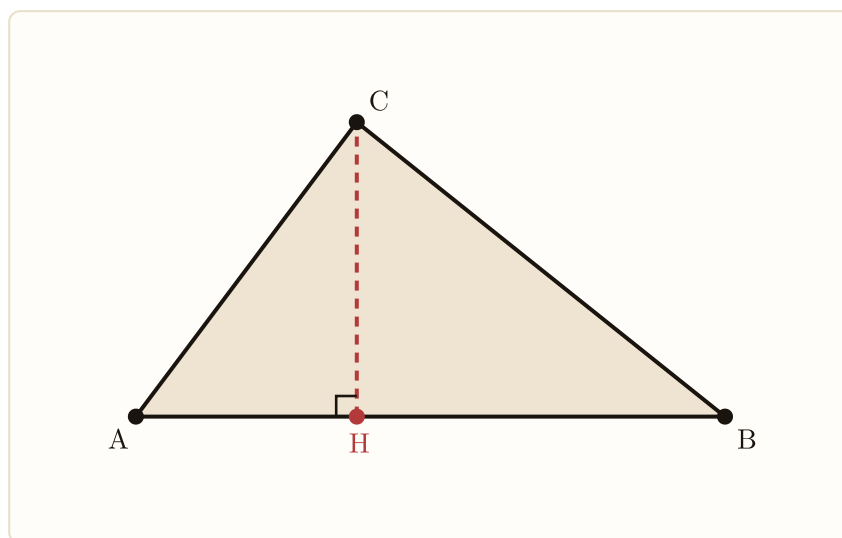
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 : \text{on obtient } 36 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 16 = 44.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 44.$$

Exercice 4 (★★) : avec le projeté orthogonal

Soient A, B, C trois points tels que $AB = 8$ et $AC = 5$. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et on suppose $AH = 3$.

1. On suppose que H est du même côté de A que B (cas 1). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\cos \widehat{BAC}$ et une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.
2. On suppose maintenant que H est de l'autre côté de A (cas 2). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ?
3. Dans le cas 1, calculer CH puis BC^2 avec le théorème de Pythagore.
4. Retrouver BC^2 avec $\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2$.



Cas 1 : $AB = 8$, $AC = 5$, $AH = 3$ et H entre A et B

Correction de l'exercice 4

Question 1

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 8 \times 3 = 24$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{24}{8 \times 5} = 0,6.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 \text{ et } \widehat{BAC} \approx 53,1^\circ.$$

Question 2

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -8 \times 3 = -24$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -24$: le produit scalaire est négatif, donc l'angle $\widehat{BAC}$ est **obtus** (environ $126,9^\circ$).

Question 3

Dans le triangle AHC rectangle en H : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - 9 = 16$, donc $CH = 4$.

H est sur $[AB]$ avec $HB = AB - AH = 8 - 3 = 5$. Dans le triangle BHC rectangle en H : $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 25 + 16 = 41$.

$CH = 4$ et $BC^2 = 41$.

Question 4

$BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 = 25 - 2 \times 24 + 64 = 41$.

On retrouve $BC^2 = 41$.

Exercice 5 (★★) : identités remarquables

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Calculer :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$;
- $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$;
- $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2$;
- $\cos \theta$, où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis une valeur approchée de θ .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 - 2 + 9 = 11.$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4 + 2 + 9 = 15.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 11 \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 15.$$

Question 2

$$\text{On développe : } (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2.$$

$$= 4 + (-1) - 2 \times 9 = -15.$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -15.$$

Question 3

$$\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 = 16 + 12 + 81.$$

$$\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 = 109.$$

Question 4

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{6}.$$

L'angle vaut environ $99,6^\circ$ (obtus, car le produit scalaire est négatif).

$$\cos \theta = -\frac{1}{6}, \text{ soit un angle d'environ } 99,6^\circ.$$

Exercice 6 (★★) : calculer un angle

Dans un repère orthonormé, $A(1; 2)$, $B(4; 3)$ et $C(2; 5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC .
2. En déduire la mesure de $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième de degré.
3. Vérifier avec un script Python :

```
from math import sqrt, acos, degrees

AB = (3, 1)
AC = (1, 3)
ps = AB[0] * AC[0] + AB[1] * AC[1]
n1 = sqrt(AB[0]**2 + AB[1]**2)
n2 = sqrt(AC[0]**2 + AC[1]**2)
print(round(degrees(acos(ps / (n1 * n2))), 1))
```

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6.$$

$$AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \text{ et } AB = AC = \sqrt{10}.$$

Question 2

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

$$\widehat{BAC} \approx 53,1^\circ.$$

Question 3

Le script calcule $\arccos(0,6)$ en degrés : il affiche **53,1**, ce qui confirme le résultat.

Le script affiche $53\{, \}1$.

Exercice 7 (★★) : retrouver les coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on rappelle que $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.
2. Un vecteur $\vec{u}$ vérifie $\vec{u} \cdot \vec{i} = -2$ et $\vec{u} \cdot \vec{j} = 5$. Donner ses coordonnées et sa norme.
3. Un vecteur $\vec{v}$ vérifie $\vec{v} \cdot \vec{i} = 4$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = 7$. Déterminer ses coordonnées.
4. Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis une valeur approchée de cet angle.

Correction de l'exercice 7

Question 1

On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Par bilinéarité : $\vec{u} \cdot \vec{i} = x\vec{i} \cdot \vec{i} + y\vec{j} \cdot \vec{i} = x \times 1 + y \times 0 = x$.

De même, $\vec{u} \cdot \vec{j} = x\vec{i} \cdot \vec{j} + y\vec{j} \cdot \vec{j} = y$.

$x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.

Question 2

D'après la question 1, $x = -2$ et $y = 5$. Donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$.

Question 3

$\vec{v} \cdot \vec{i} = 4$ donne $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$. Puis $\vec{v} \cdot \vec{u} = 4 \times (-2) + y \times 5 = -8 + 5y = 7$, donc $5y = 15$ et $y = 3$.

$\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (et $\|\vec{v}\| = 5$).

Question 4

$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{7}{5\sqrt{29}} \approx 0,260$.

$\cos \theta = \frac{7}{5\sqrt{29}}$, soit un angle d'environ **74,9°**.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
2. Pour tous vecteurs, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. Pour tous vecteurs, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
4. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
5. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
6. Si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Contre-exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, sans qu'aucun ne soit nul.**Faux.**

Affirmation 2

C'est la symétrie du produit scalaire.

Vrai.

Affirmation 3

Il manque le terme $2\vec{u} \cdot \vec{v}$. Contre-exemple : $\vec{u} = \vec{v} \neq \vec{0}$ donne $\|2\vec{u}\|^2 = 4\|\vec{u}\|^2 \neq 2\|\vec{u}\|^2$.**Faux.**

Affirmation 4

Contre-exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 = \vec{u} \cdot \vec{w}$ mais $\vec{v} \neq \vec{w}$.**Faux.**

Affirmation 5

L'angle est 0° et $\cos 0^\circ = 1$.**Vrai.**

Affirmation 6

On développe : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. L'égalité donne donc $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux (c'est la réciproque de Pythagore).**Vrai.**

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Calculer** un produit scalaire avec des coordonnées (exercices 1 et 6).
- **Utiliser** $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ (exercice 2).
- **Décomposer** avec Chasles dans une figure (exercice 3).
- **Utiliser le projeté orthogonal** (exercice 4).
- **Développer** avec les identités remarquables (exercice 5).
- **Calculer un angle** (exercices 4, 6 et 7).
- **Retrouver les coordonnées** d'un vecteur avec des produits scalaires (exercice 7).
- Un **vrai/faux** sur les propriétés (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$:

- A. 10 (**bonne réponse**)
- B. 14
- C. -2
- D. $\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Justification : $2 \times (-1) + 3 \times 4 = -2 + 12 = 10$.

2. Si $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et l'angle vaut 90° , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} =$:

- A. 10
- B. 7
- C. 0 (**bonne réponse**)
- D. -10

Justification : $\cos 90^\circ = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ est égal à :

- A. $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
- B. $\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (**bonne réponse**)
- C. $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$
- D. $\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Justification : C'est l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour les vecteurs.

4. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ (vecteurs non nuls), l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

- A. aigu

B. droit

C. **obtus (bonne réponse)**

D. nul

Justification : $\cos \theta < 0$ donc θ est obtus.

5. Le produit scalaire de deux vecteurs est :

A. un vecteur

B. **un nombre réel (bonne réponse)**

C. un point

D. un angle

Justification : Le produit scalaire est un **nombre** réel.