

Contrôle : chapitre 7, Produit scalaire

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-1; 1)$, $B(5; 3)$ et $C(1; 5)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
2. Calculer les distances AB et AC , puis déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. (2 points)
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C . (1 point)
4. Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. (1 point)
5. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer AH puis démontrer que H est le milieu de $[AB]$. (1 point)

Exercice 2 (7 points) : Un triangle et sa médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$. On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. En utilisant la formule d'Al-Kashi, calculer $\cos \widehat{BAC}$, puis donner une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ au dixième de degré. (2 points)
2. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer AH puis CH , et en déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $10\sqrt{3}$, puis donner sa valeur approchée au centième. (1,5 points)
3. Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ (théorème de la médiane). (2 points)
4. En déduire la longueur AI (valeur exacte). (1,5 points)

Exercice 3 (7 points) : Deux balises et un bateau

Deux balises A et B sont placées en mer, à 10 km l'une de l'autre. On note I le milieu de $[AB]$. Un bateau est représenté par un point M du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. (2 points)

2. Le capitaine veut que l'angle $\widehat{AMB}$ soit droit. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, puis l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11$. (1,5 points)

3. Soit k un réel. Suivant les valeurs de k , déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. (1,5 points)

4. On munit le plan d'un repère orthonormé d'unité 1 km tel que $A(-5; 0)$ et $B(5; 0)$. On exécute le script Python ci-dessous. Que représente la fonction `ps` ? Donner les cinq lignes affichées, puis préciser lesquelles des positions M testées permettent au capitaine de voir les balises sous un angle droit.

```
<code class="language-python">def ps(M, A, B): return (A[0]-M[0])(B[0]-M[0]) + (A[1]-M[1])(B[1]-M[1]) A = (-5, 0) B = (5, 0) for M in [(0, 5), (3, 4), (4, 3), (0, 0), (6, 0)]: print(M, ps(M, A, B)) </code></pre> (2 points)
```