

Contrôle : chapitre 7, Produit scalaire

Durée : 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-1; 1)$, $B(5; 3)$ et $C(1; 5)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
2. Calculer les distances AB et AC , puis déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. (2 points)
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C . (1 point)
4. Déterminer le réel m pour que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. (1 point)
5. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer AH puis démontrer que H est le milieu de $[AB]$. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le repère est orthonormé : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 2 + 2 \times 4 = 12 + 8.$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20.$$

Barème : 0,5 point pour les coordonnées des deux vecteurs ; 0,5 point pour le produit scalaire.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (2 points)

$$AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ et } AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Pour deux vecteurs non nuls : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC} =$

$$\frac{20}{2\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}} = \frac{20}{4\sqrt{50}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $\widehat{BAC} \in [0; 180^\circ]$, on obtient $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Barème : 0,5 point pour les deux normes ; 1 point pour le cosinus (formule avec les normes et simplification) ; 0,5 point pour la mesure de l'angle.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-2) \times 4 + (-4) \times (-2) = -8 + 8 = 0$: les

vecteurs sont orthogonaux, le triangle est rectangle en C .

De plus $CA^2 = (-2)^2 + (-4)^2 = 20$ et $CB^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$, donc $CA = CB$.

Le triangle ABC est **rectangle isocèle en C** (ce qui est cohérent avec $\widehat{BAC} = 45^\circ$).

Barème : 0,5 point pour le produit scalaire nul et la conclusion « rectangle » ; 0,5 point pour l'égalité $CA = CB$.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1 point)

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \iff \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff 6m + 3 \times 2 = 0 \iff 6m = -6.$$

$$m = -1.$$

Barème : 0,5 point pour l'équation $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; 0,5 point pour la valeur de m .

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1 point)

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et que ce produit est positif, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens : $AB \times AH = 20$.

$$\text{Donc } AH = \frac{20}{2\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = \frac{AB}{2}.$$

H est sur la demi-droite $[AB)$ à la distance $\frac{AB}{2}$ de A : H est le milieu de $[AB]$, soit $H(2; 2)$.

Barème : 0,5 point pour $AB \times AH = 20$ et $AH = \sqrt{10}$; 0,5 point pour la conclusion (sens et milieu).

Exercice 2 (7 points) : Un triangle et sa médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$. On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. En utilisant la formule d'Al-Kashi, calculer $\cos \widehat{BAC}$, puis donner une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ au dixième de degré. (2 points)
2. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer AH puis CH , et en déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $10\sqrt{3}$, puis donner sa valeur approchée au centième. (1,5 points)
3. Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ (théorème de la médiane). (2 points)
4. En déduire la longueur AI (valeur exacte). (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

Dans le triangle ABC , d'après la formule d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Donc $64 = 49 + 25 - 70 \cos \widehat{BAC}$, soit $70 \cos \widehat{BAC} = 10$.

$\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{7}$ et $\widehat{BAC} \approx 81,8^\circ$.

Barème : 1 point pour la formule d'Al-Kashi écrite avec les bons côtés et les valeurs ; 0,5 point pour $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{7}$; 0,5 point pour l'angle à $0,1^\circ$ près (calculatrice en degrés).

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

Comme $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{7} > 0$, l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et H appartient à la demi-droite $[AB)$.

Dans le triangle AHC rectangle en H : $AH = AC \cos \widehat{BAC} = 5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$.

Théorème de Pythagore dans AHC : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - \frac{25}{49} = \frac{1200}{49}$, donc $CH = \frac{\sqrt{1200}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$.

Aire = $\frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{20\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$.

L'aire vaut $10\sqrt{3} \approx 17,32$ unités d'aire.

Barème : 0,5 point pour $AH = \frac{5}{7}$; 0,5 point pour $CH = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ (Pythagore) ; 0,5 point pour l'aire exacte et la valeur approchée.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

Comme I est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$. Par la relation de Chasles :

$$AB^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 \text{ et } AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 - 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2.$$

En additionnant, les doubles produits s'annulent : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$.

Or $IB = \frac{BC}{2}$, donc $2IB^2 = \frac{BC^2}{2}$ et $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Barème : 0,5 point pour la décomposition de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec I et $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$; 1 point pour les deux développements et l'annulation des doubles produits ; 0,5 point pour $IB = \frac{BC}{2}$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1,5 points)

D'après le théorème de la médiane : $49 + 25 = 2AI^2 + \frac{64}{2}$, soit $74 = 2AI^2 + 32$.

Donc $AI^2 = \frac{74 - 32}{2} = 21$.

Comme $AI > 0$: $AI = \sqrt{21} \approx 4,58$.

Barème : 1 point pour le remplacement dans la formule et $AI^2 = 21$; 0,5 point pour $AI = \sqrt{21}$.

Exercice 3 (7 points) : Deux balises et un bateau

Deux balises A et B sont placées en mer, à 10 km l'une de l'autre. On note I le milieu de $[AB]$. Un bateau est représenté par un point M du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. (2 points)
2. Le capitaine veut que l'angle $\widehat{AMB}$ soit droit. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, puis l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11$. (1,5 points)
3. Soit k un réel. Suivant les valeurs de k , déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. (1,5 points)
4. On munit le plan d'un repère orthonormé d'unité 1 km tel que $A(-5; 0)$ et $B(5; 0)$. On exécute le script Python ci-dessous. Que représente la fonction `ps` ? Donner les cinq lignes affichées, puis préciser lesquelles des positions M testées permettent au capitaine de voir les balises sous un angle droit.

```
<code class="language-python">def ps(M, A, B): return (A[0]-M[0])(B[0]-M[0]) + (A[1]-M[1])(B[1]-M[1]) A = (-5, 0) B = (5, 0) for M in [(0, 5), (3, 4), (4, 3), (0, 0), (6, 0)]: print(M, ps(M, A, B)) </code></pre> (2 points)
```

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 \text{ (identité remarquable).}$$

$$\text{Or } IA = \frac{AB}{2} \text{ donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Barème : 0,5 point pour la décomposition avec I et $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$; 1 point pour le développement $MI^2 - IA^2$; 0,5 point pour $IA = \frac{AB}{2}$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

Ici $AB = 10$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 25$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = 25 \iff MI = 5$: c'est le **cercle de centre I et de rayon 5**, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$ (le bateau voit les balises sous un angle droit lorsqu'il est sur ce cercle, en dehors de A et B).

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11 \iff MI^2 = 36 \iff MI = 6.$$

C'est le **cercle de centre I et de rayon 6**.

Barème : 0,5 point pour la relation $MI^2 = k + 25$ exploitée ; 0,5 point pour le cercle de diamètre $[AB]$; 0,5 point pour le cercle de rayon 6.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 - 25 = k \iff MI^2 = k + 25.$$

Si $k + 25 < 0$, soit $k < -25$: un carré ne peut pas être négatif, l'ensemble est **vide**.

Si $k = -25$: $MI^2 = 0$, l'ensemble est **réduit au point I** .

Si $k > -25$: c'est le **cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + 25}$** .

Barème : 0,5 point pour $MI^2 = k + 25$; 1 point pour les trois cas avec leur justification.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2 points)

La fonction $\text{ps}(M, A, B)$ renvoie le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$: les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ sont $(x_A - x_M ; y_A - y_M)$ et celles de $\overrightarrow{MB}$ sont $(x_B - x_M ; y_B - y_M)$.

(0, 5) 0
(3, 4) 0
(4, 3) 0
(0, 0) -25
(6, 0) 11

Par exemple pour $M(3; 4)$: $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $-16 + 16 = 0$.

Les positions (0; 5), (3; 4) et (4; 3) donnent un produit scalaire nul : l'angle $\widehat{AMB}$ est droit. Elles sont bien sur le cercle de centre O et de rayon 5 ($0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 = 25$). Pour (0; 0) (point I) le produit vaut -25 , et pour (6; 0) il vaut 11 : M est sur le cercle de rayon 6 de la question 2.

Barème : 1 point pour les cinq valeurs affichées ; 1 point pour les trois positions à angle droit, justifiées par le produit scalaire nul ou le cercle.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20