

Trigonométrie : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- un **dodécagone régulier** dans le cercle trigonométrique : coordonnées, périmètre, aire ;
- l'**algorithme d'Archimède** pour approcher π ;
- une **roue de vélo** : coordonnées d'un point qui tourne et longueur d'arc.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- la **symétrie utilisée** est nommée à chaque valeur exacte ;
- les **formules** ($\ell = R\alpha$, Pythagore, distance dans un repère orthonormé) sont citées ;
- les conclusions sont des **phrases avec unités**.

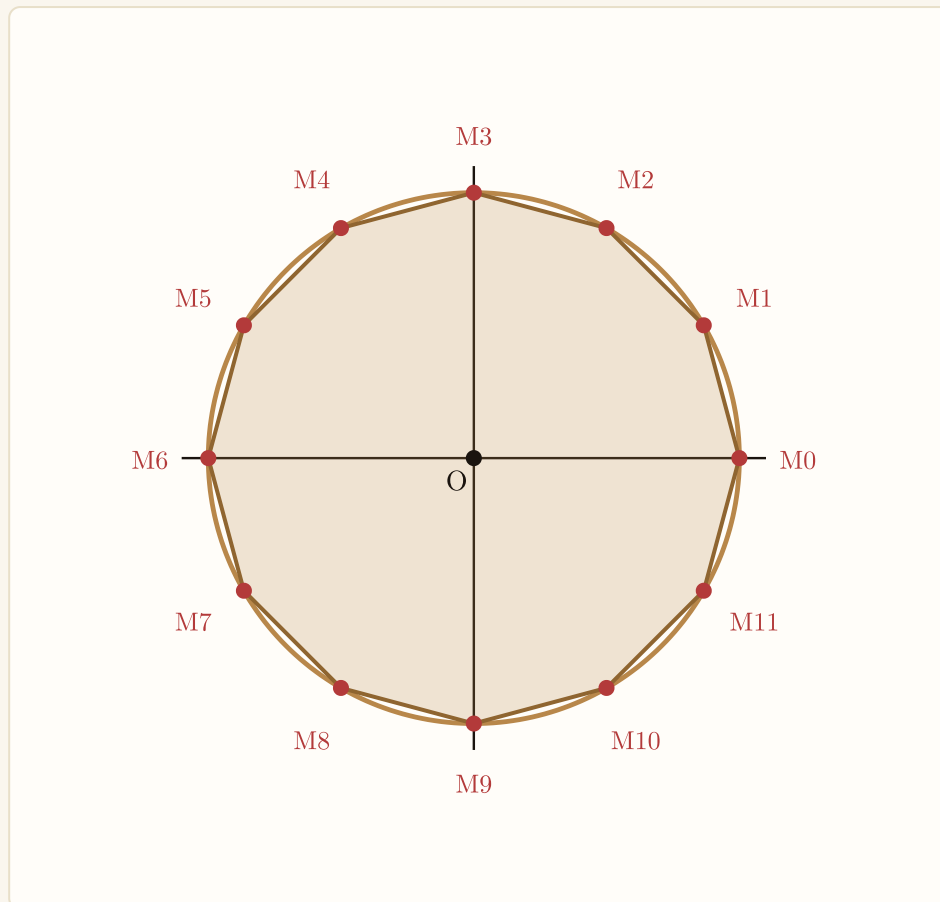
Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Dessine **toujours** le cercle : un schéma propre rapporte des points et évite les erreurs de signe.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus ».

Exercice 1 : un dodécagone dans le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. Pour $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$, on pose $M_k = M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$.

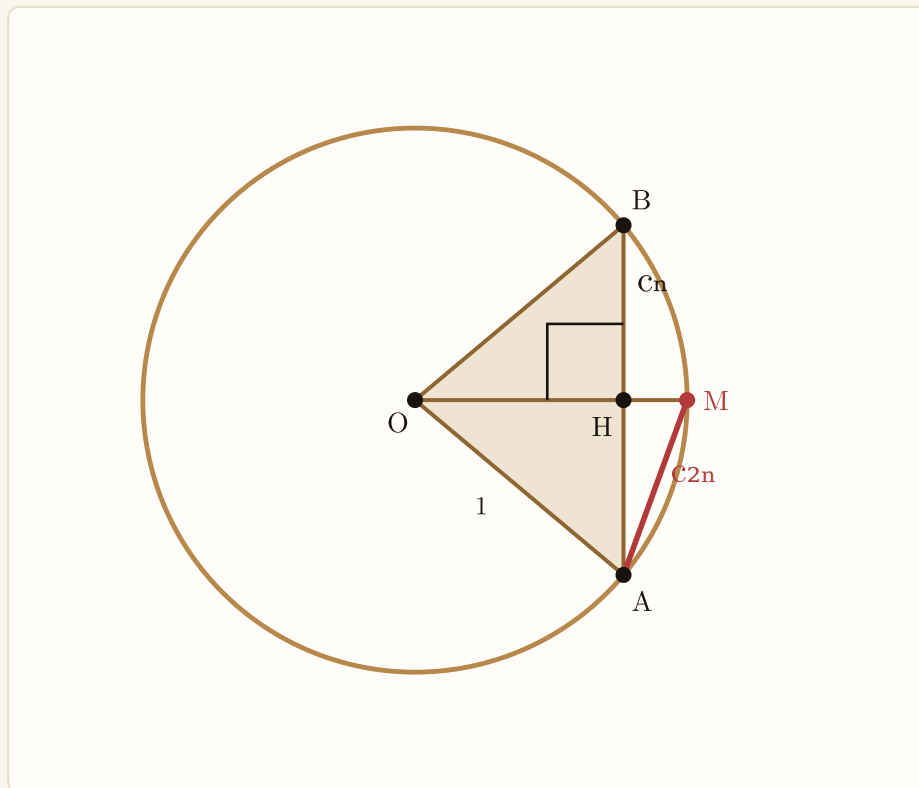


Le dodécagone régulier $M_0 M_1 \dots M_{11}$ inscrit dans le cercle trigonométrique

1. Donner les coordonnées exactes de $M_0, M_1, \dots, M_{11}$, en nommant les symétries utilisées.
2. Calculer la distance $M_0 M_1$. Montrer que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. Justifier que $M_0 M_1 \dots M_{11}$ est un dodécagone régulier.
3. Calculer le périmètre de ce dodécagone et le comparer à 2π .
4. En découpant le dodécagone en triangles $OM_k M_{k+1}$, calculer son aire et la comparer à l'aire π du disque.
5. Montrer que le triangle $M_0 M_4 M_8$ est équilatéral.

Exercice 2 : l'algorithme d'Archimède

On note c_n le côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. Soit $[AB]$ un côté du polygone à n côtés, de longueur c_n , M le milieu du petit arc AB et H le milieu de $[AB]$. Le segment $[AM]$ est un côté du polygone à $2n$ côtés.



Archimède : A et B voisins dans le polygone à n côtés, M milieu de l'arc AB

1. Montrer que $c_6 = 1$.
2. Montrer que $c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$.
3. Calculer les valeurs exactes de c_{12}^2 et de c_{24}^2 . Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ et en déduire une expression de c_{24}^2 sans racine imbriquée.
4. Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche, pour $n = 12, 24, 48, 96, 192$, le demi-périmètre $\frac{n c_n}{2}$, et donner les valeurs obtenues.

```
from math import sqrt

c = ...          # côté de l'hexagone
n = 6
for etape in range(5):
    c = ...       # côté du polygone à 2n côtés
    n = ...
    print(n, ...) # n et le demi-périmètre
```

5. Pourquoi ces nombres sont-ils des minorants de π ? Que peut-on affirmer sur π avec $n = 96$?

6. Écrire un programme qui renvoie le premier n (de la forme 6×2^k) pour lequel le demi-périmètre est à moins de 10^{-3} de π (on pourra utiliser `pi` du module `math` pour mesurer l'écart).

7. (Pour aller plus loin, hors programme.) Pour obtenir une borne supérieure, on considère le polygone régulier à n côtés *circonscrit* au cercle, dont les côtés sont parallèles à ceux du polygone inscrit et tangents au cercle. On admet que son périmètre est supérieur à 2π . Montrer que son côté vaut $d_n = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}$, puis encadrer π avec $n = 6$ et avec $n = 96$.

Exercice 3 : une roue de vélo

Une roue de vélo a pour rayon $R = 0,35$ m. On munit le plan de la roue d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité le mètre, où O est le centre de la roue et $\vec{i}$ est horizontal. Un point P du pneu part de $P_0(R; 0)$ et tourne autour de O dans le sens direct. On note P_x sa position quand la roue a tourné de x radians.

1. Justifier que P_x a pour coordonnées $(R \cos x; R \sin x)$.

2. Donner les coordonnées exactes, puis arrondies au millimètre, de P_x pour $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4}$.

3. La roue fait les $\frac{5}{12}$ d'un tour dans le sens direct. Quelles sont les coordonnées de P ? Quelle distance P a-t-il parcourue sur le pneu ?

4. Le centre O est à 0,35 m du sol. Exprimer la hauteur de P_x au-dessus du sol en fonction de x , puis la calculer pour $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

5. Calculer la distance $P_0P_{\pi/3}$. Que remarque-t-on ?