

Trigonométrie : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- un **dodécagone régulier** dans le cercle trigonométrique : coordonnées, périmètre, aire ;
- l'**algorithme d'Archimède** pour approcher π ;
- une **roue de vélo** : coordonnées d'un point qui tourne et longueur d'arc.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- la **symétrie utilisée** est nommée à chaque valeur exacte ;
- les **formules** ($\ell = R\alpha$, Pythagore, distance dans un repère orthonormé) sont citées ;
- les conclusions sont des **phrases avec unités**.

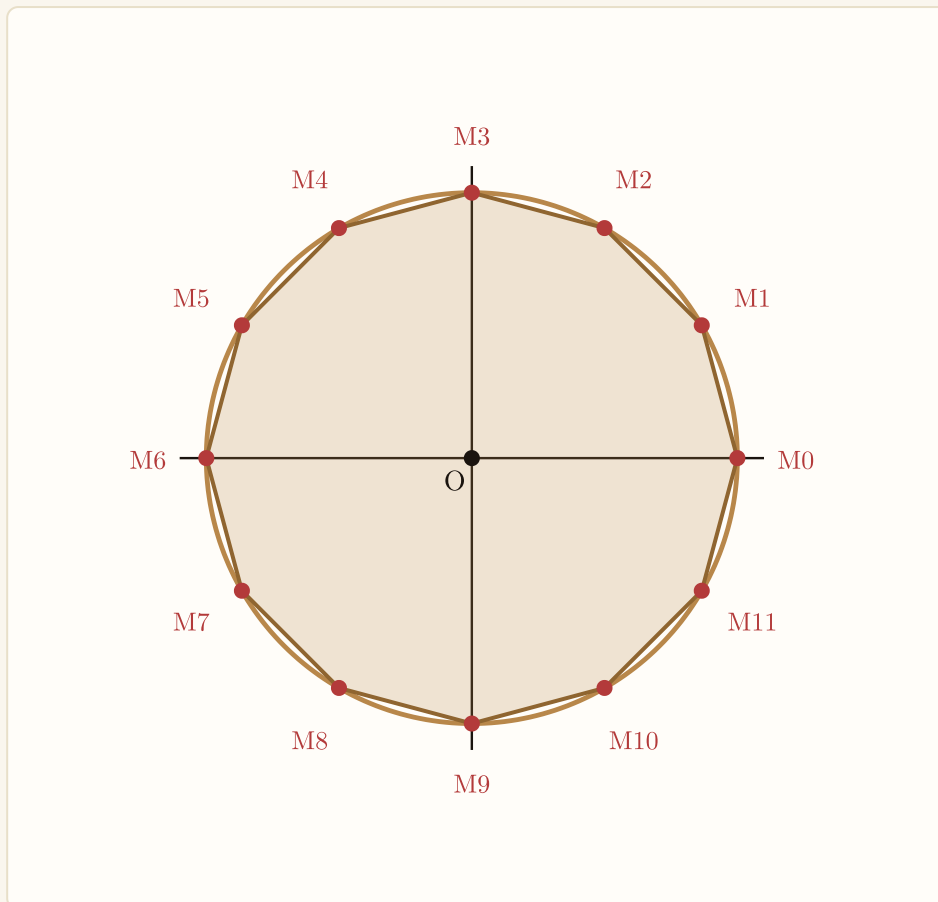
Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Dessine **toujours** le cercle : un schéma propre rapporte des points et évite les erreurs de signe.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus ».

Exercice 1 : un dodécagone dans le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. Pour $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$, on pose $M_k = M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$.



Le dodécagone régulier $M_0 M_1 \dots M_{11}$ inscrit dans le cercle trigonométrique

1. Donner les coordonnées exactes de $M_0, M_1, \dots, M_{11}$, en nommant les symétries utilisées.
2. Calculer la distance $M_0 M_1$. Montrer que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. Justifier que $M_0 M_1 \dots M_{11}$ est un dodécagone régulier.
3. Calculer le périmètre de ce dodécagone et le comparer à 2π .
4. En découpant le dodécagone en triangles $OM_k M_{k+1}$, calculer son aire et la comparer à l'aire π du disque.
5. Montrer que le triangle $M_0 M_4 M_8$ est équilatéral.

Correction de la question 1

On utilise les valeurs remarquables pour M_1 et M_2 , les points I, J, I', J' pour $k = 0, 3, 6, 9$, et les angles associés pour les autres.

k	$x_k = \frac{k\pi}{6}$	Coordonnées de M_k	Justification
0	0	(1 ; 0)	point I
1	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$	valeur remarquable
2	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	valeur remarquable
3	$\frac{\pi}{2}$	(0 ; 1)	point J
4	$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	symétrique de M_2 par rapport à (OJ)
5	$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$	symétrique de M_1 par rapport à (OJ)
6	π	(-1 ; 0)	point I'
7	$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	symétrique de M_1 par rapport à O
8	$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	symétrique de M_2 par rapport à O
9	$\frac{3\pi}{2}$	(0 ; -1)	point J'
10	$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	symétrique de M_2 par rapport à (OI)
11	$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	symétrique de M_1 par rapport à (OI)

Les douze points ont les coordonnées du tableau ci-dessus.

Correction de la question 2

Dans un repère orthonormé : $M_0M_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

$$M_0M_1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{4} = 2 - \sqrt{3}.$$

Donc $M_0M_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Montrons que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. Le nombre $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ est positif et son carré vaut $\frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$. Deux nombres positifs de même carré sont égaux.

Le dodécagone est régulier. Pour tout k , l'angle $\widehat{M_kOM_{k+1}}$ mesure $\frac{\pi}{6}$ (arc de longueur $\frac{\pi}{6}$; pour $k = 11$, $M_{12} = M_0$ car $\frac{12\pi}{6} = 2\pi$) et $OM_k = OM_{k+1} = 1$. Les triangles OM_kM_{k+1} ont un angle égal compris entre deux côtés égaux : ils sont isométriques, donc tous les côtés M_kM_{k+1} ont la même longueur. Les douze sommets sont sur le cercle $\mathcal{C}$.

$$M_0M_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \text{ et } M_0M_1 \dots M_{11} \text{ est un dodécagone régulier inscrit dans } \mathcal{C}.$$

Correction de la question 3

$$\text{Le périmètre vaut } 12 \times M_0M_1 = 12 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

$$\text{Valeur approchée : } \sqrt{6} \approx 2,4495 \text{ et } \sqrt{2} \approx 1,4142, \text{ donc } 6(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 6 \times 1,0353 \approx 6,21.$$

$$\text{Le périmètre est } 6(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 6,21, \text{ légèrement inférieur au périmètre } 2\pi \approx 6,28 \text{ du cercle.}$$

Correction de la question 4

Le dodécagone est convexe et contient O : il est réunion des 12 triangles OM_kM_{k+1} , tous isométriques.

Triangle OM_0M_1 : on prend pour base $[OM_0]$, de longueur 1, portée par (OI) . La hauteur issue de M_1 est la distance de M_1 à (OI) , c'est-à-dire son ordonnée $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Aire de } OM_0M_1 : \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Aire du dodécagone : } 12 \times \frac{1}{4} = 3.$$

L'aire du dodécagone vaut 3, légèrement inférieure à l'aire $\pi \approx 3,14$ du disque, ce qui est cohérent puisque le dodécagone est inclus dans le disque.

Correction de la question 5

$$M_0(1; 0), M_4\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } M_8\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$M_0M_4^2 = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3.$$

$$M_4M_8^2 = 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (-\sqrt{3})^2 = 3.$$

$$M_8M_0^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3.$$

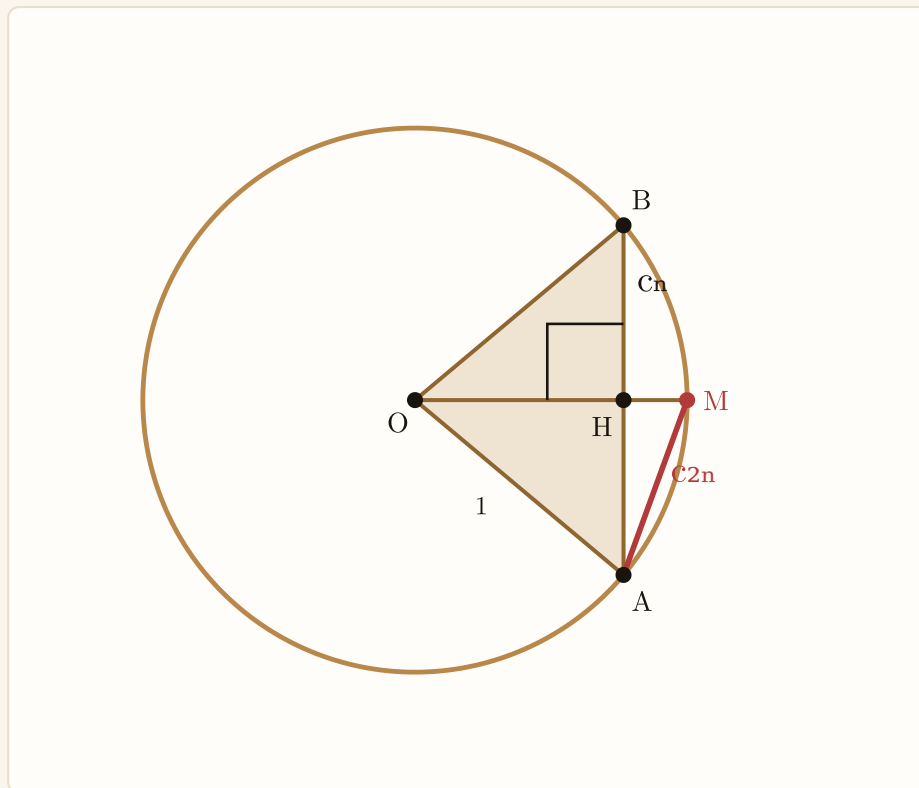
Les trois côtés valent $\sqrt{3}$: le triangle $M_0M_4M_8$ est équilatéral.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- Coordonnées des douze points avec la **symétrie nommée** pour chaque angle associé.
- Distance $M_0M_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ calculée avec la formule de la distance, puis simplifiée ($\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, justifié par le carré).
- Régularité justifiée par des triangles isométriques ($OM_k = OM_{k+1} = 1$, angle $\frac{\pi}{6}$).
- Périmètre $6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et comparaison avec 2π .
- Aire : base 1, hauteur $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, douze triangles : $3 < \pi$.
- Triangle équilatéral : les trois carrés des côtés égaux à 3.

Exercice 2 : l'algorithme d'Archimède

On note c_n le côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. Soit $[AB]$ un côté du polygone à n côtés, de longueur c_n , M le milieu du petit arc AB et H le milieu de $[AB]$. Le segment $[AM]$ est un côté du polygone à $2n$ côtés.



Archimède : A et B voisins dans le polygone à n côtés, M milieu de l'arc AB

1. Montrer que $c_6 = 1$.
2. Montrer que $c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$.
3. Calculer les valeurs exactes de c_{12}^2 et de c_{24}^2 . Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ et en déduire une expression de c_{24}^2 sans racine imbriquée.
4. Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche, pour $n = 12, 24, 48, 96, 192$, le demi-périmètre $\frac{n c_n}{2}$, et donner les valeurs obtenues.

```
from math import sqrt

c = ...          # côté de l'hexagone
n = 6
for etape in range(5):
    c = ...      # côté du polygone à 2n côtés
    n = ...
    print(n, ...) # n et le demi-périmètre
```

5. Pourquoi ces nombres sont-ils des minorants de π ? Que peut-on affirmer sur π avec $n = 96$?

6. Écrire un programme qui renvoie le premier n (de la forme 6×2^k) pour lequel le demi-périmètre est à moins de 10^{-3} de π (on pourra utiliser `pi` du module `math` pour mesurer l'écart).

7. (Pour aller plus loin, hors programme.) Pour obtenir une borne supérieure, on considère le polygone régulier à n côtés *circonscrit* au cercle, dont les côtés sont parallèles à ceux du polygone inscrit et tangents au cercle. On admet que son périmètre est supérieur à 2π . Montrer que son côté vaut $d_n = \frac{2c_n}{\sqrt{4-c_n^2}}$, puis encadrer π avec $n = 6$ et avec $n = 96$.

Correction de la question 1

Si A et B sont deux sommets consécutifs de l'hexagone régulier, $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle OAB est isocèle en O : ses angles à la base sont égaux et valent chacun $\frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$. Il est équilatéral, donc $AB = OA = 1$.

$$c_6 = 1.$$

Correction de la question 2

$OA = OB$ et $MA = MB$ (M est le milieu de l'arc AB) : O et M sont sur la médiatrice de $[AB]$. Cette droite coupe $[AB]$ en son milieu H à angle droit. Le point H est dans le disque, sur le rayon $[OM]$: $OM = OH + HM$, donc $HM = 1 - OH$.

Triangle OHA rectangle en H (Pythagore) : $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1 - \frac{c_n^2}{4}$.

Triangle AHM rectangle en H (Pythagore) : $c_{2n}^2 = AM^2 = AH^2 + HM^2 = \frac{c_n^2}{4} + (1 - OH)^2 = \frac{c_n^2}{4} + 1 - 2OH + OH^2$.

En remplaçant OH^2 : $c_{2n}^2 = \frac{c_n^2}{4} + 1 - 2OH + 1 - \frac{c_n^2}{4} = 2 - 2OH$.

Or $2OH = 2\sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}} = \sqrt{4 \left(1 - \frac{c_n^2}{4} \right)} = \sqrt{4 - c_n^2}$.

$$c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}.$$

Correction de la question 3

Avec $c_6 = 1$: $c_{12}^2 = 2 - \sqrt{4 - 1} = 2 - \sqrt{3}$.

Puis $c_{24}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_{12}^2} = 2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Le nombre $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ est positif et son carré vaut $\frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$. Donc $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

$c_{12}^2 = 2 - \sqrt{3}$ et $c_{24}^2 = 2 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ (soit $c_{24} \approx 0,2611$).

Correction de la question 4

```
from math import sqrt

c = 1.0          # côté de l'hexagone inscrit dans le cercle de rayon 1
n = 6            # nombre de côtés
for etape in range(5):
    c = sqrt(2 - sqrt(4 - c * c))  # côté du polygone à 2n côtés
    n = 2 * n
    print(n, n * c / 2)           # demi-périmètre : un minorant de pi
```

n	12	24	48	96	192
$\frac{n c_n}{2}$ (arrondi à 10^{-5})	3,10583	3,13263	3,13935	3,14103	3,14145

Le programme affiche les cinq demi-périmètres du tableau.

Correction de la question 5

Chaque côté du polygone est une corde, plus courte que l'arc qu'il sous-tend (le plus court chemin entre deux points est le segment). Le périmètre $n c_n$ est donc inférieur à la longueur 2π du cercle, d'où $\frac{n c_n}{2} < \pi$: c'est un minorant de π . Les valeurs augmentent avec n , donc la précision s'améliore.

Avec $n = 96$: $3,141 < 3,14103 \leq \frac{96 c_{96}}{2} < \pi$, donc $\pi > 3,141$.

Correction de la question 6

```

from math import sqrt, pi

c, n = 1.0, 6
while pi - n * c / 2 >= 0.001:    # pi ne sert ici qu'à mesurer la qualité
    c = sqrt(2 - sqrt(4 - c * c))
    n = 2 * n
print(n, n * c / 2)

```

On calcule : $n = 48$ donne $\pi - 3,13935 \approx 0,0022 > 10^{-3}$; $n = 96$ donne $\pi - 3,14103 \approx 0,00056 < 10^{-3}$.

Le programme affiche **96** et **3,14103...** : il faut un polygone à **96** côtés.

Correction de la question 7

Pour aller plus loin, hors programme. Le polygone circonscrit est l'image du polygone inscrit par l'homothétie de centre O qui envoie le côté $[AB]$ sur un côté tangent au cercle. La distance de O au côté inscrit est $OH = \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}$; la distance de O au côté circonscrit (tangent) est 1. Le rapport est donc $\frac{1}{OH}$.

$$d_n = \frac{c_n}{OH} = \frac{c_n}{\sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}} = \frac{2c_n}{\sqrt{4 - c_n^2}}.$$

Pour $n = 6$: $d_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc $\frac{6d_6}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ et $3 < \pi < 3,47$.

```

from math import sqrt

c, n = 1.0, 6
for etape in range(4):
    c = sqrt(2 - sqrt(4 - c * c))
    n = 2 * n
d = 2 * c / sqrt(4 - c * c)    # côté du polygone circonscrit
print(n * c / 2, n * d / 2)

```

Pour $n = 96$, le programme donne $3,14103 < \pi < 3,14272$, donc $3,141 < \pi < 3,143$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- Hexagone : triangle OAB isocèle d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc équilatéral.
- Preuve de la relation : médiatrice, $OH = \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}$, $HM = 1 - OH$, Pythagore dans AHM , simplification.

- Valeurs exactes $c_{12}^2 = 2 - \sqrt{3}$ et $c_{24}^2 = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ puis simplification de la racine imbriquée par un carré.
- Programme correct (initialisation à 1, formule dans la boucle, n doublé, affichage de $\frac{nc}{2}$).
- Minorant justifié (corde plus courte que l'arc) et conclusion $\pi > 3,141$.
- Boucle `while` avec le test sur l'écart et résultat $n = 96$.

Exercice 3 : une roue de vélo

Une roue de vélo a pour rayon $R = 0,35$ m. On munit le plan de la roue d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité le mètre, où O est le centre de la roue et $\vec{i}$ est horizontal. Un point P du pneu part de $P_0(R; 0)$ et tourne autour de O dans le sens direct. On note P_x sa position quand la roue a tourné de x radians.

1. Justifier que P_x a pour coordonnées $(R \cos x; R \sin x)$.
2. Donner les coordonnées exactes, puis arrondies au millimètre, de P_x pour $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4}$.
3. La roue fait les $\frac{5}{12}$ d'un tour dans le sens direct. Quelles sont les coordonnées de P ? Quelle distance P a-t-il parcourue sur le pneu ?
4. Le centre O est à 0,35 m du sol. Exprimer la hauteur de P_x au-dessus du sol en fonction de x , puis la calculer pour $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
5. Calculer la distance $P_0P_{\pi/3}$. Que remarque-t-on ?

Correction de la question 1

Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre O et de rapport R . Elle transforme le cercle trigonométrique en le cercle de centre O et de rayon R , et elle multiplie les coordonnées par R .

Le point P_x est atteint en tournant de l'angle x depuis $P_0 = \mathcal{H}(I)$: c'est $\mathcal{H}(M(x))$, avec $M(x) = (\cos x; \sin x)$.

$$P_x = (R \cos x; R \sin x).$$

Correction de la question 2

On utilise les valeurs remarquables et les angles associés, avec $R = 0,35$ et $\frac{R}{2} = 0,175$.

x	Coordonnées exactes de P_x	Valeurs approchées (m)
$\frac{\pi}{6}$	$(0,175\sqrt{3}; 0,175)$	$(0,303; 0,175)$
$\frac{\pi}{3}$	$(0,175; 0,175\sqrt{3})$	$(0,175; 0,303)$
$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$	$(-0,175\sqrt{2}; 0,175\sqrt{2})$	$(-0,247; 0,247)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(0,175\sqrt{2}; -0,175\sqrt{2})$	$(0,247; -0,247)$

Pour $\frac{3\pi}{4}$: $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ (symétrie par rapport à (OJ)). Pour $-\frac{\pi}{4}$: symétrie par rapport à (OI) .

Voir le tableau.

Correction de la question 3

$\frac{5}{12}$ de tour correspondent à $x = \frac{5}{12} \times 2\pi = \frac{5\pi}{6}$.

$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (symétrie par rapport à (OJ)). Donc $P = \left(-0,35 \times \frac{\sqrt{3}}{2}; 0,35 \times \frac{1}{2}\right) = (-0,175\sqrt{3}; 0,175) \approx (-0,303; 0,175)$.

Longueur parcourue : $\ell = Rx = 0,35 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{24} \approx 0,916$.

$P \approx (-0,303; 0,175)$ et P a parcouru $\frac{7\pi}{24} \approx 0,92$ m sur le pneu.

Correction de la question 4

Le centre est à 0,35 m du sol et l'ordonnée de P_x dans le repère est $R \sin x$: la hauteur est $h(x) = 0,35 + 0,35 \sin x$.

$x = \frac{\pi}{6}$: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $h = 0,35 + 0,175 = 0,525$.

$x = \frac{7\pi}{6}$: $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (symétrie par rapport à O), $h = 0,35 - 0,175 = 0,175$.

$x = \frac{3\pi}{2}$: $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $h = 0$: P touche le sol.

Les hauteurs sont 0,525 m, 0,175 m et 0 m.

Correction de la question 5

$P_0 = (0,35; 0)$ et $P_{\pi/3} = (0,175; 0,175\sqrt{3})$.

$P_0P_{\pi/3}^2 = (0,175 - 0,35)^2 + (0,175\sqrt{3})^2 = 0,175^2 + 3 \times 0,175^2 = 4 \times 0,175^2$, donc $P_0P_{\pi/3} = 2 \times 0,175 = 0,35$.

La distance vaut **0,35** m, c'est-à-dire R : le triangle $OP_0P_{\pi/3}$ est équilatéral (angle au sommet $\frac{\pi}{3}$), comme les côtés de l'hexagone régulier.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- Justification des coordonnées $(R \cos x; R \sin x)$ par l'homothétie de rapport R .
- Valeurs exactes avec la symétrie nommée, puis arrondis au millimètre.
- Conversion $\frac{5}{12}$ de tour $= \frac{5\pi}{6}$ et longueur d'arc $\ell = Rx$.
- Hauteur $0,35 + 0,35 \sin x$ et lecture des signes sur le cercle.
- Distance dans un repère orthonormé, lien avec l'hexagone régulier.