

Trigonométrie

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Triangle équilatéral inscrit

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Pour tout réel x , on note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique associé à x . On pose $A = M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $B = M\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $C = M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

1. Donner la mesure principale de chacun des trois réels, puis les coordonnées exactes de A , B et C .
2. Calculer les longueurs AB , BC et CA . Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Calculer l'aire du triangle ABC .
4. Vérifier que O est le centre de gravité du triangle ABC .

Exercice S2 : Angles associés et expression

Pour tout réel x , on pose $P(x) = \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

1. Montrer que $P(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$, puis que $P(x) = 1 - 2 \cos^2 x$.
2. Calculer la valeur exacte de $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
3. Calculer les valeurs exactes de $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et de $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.
4. Soit x un réel tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculer $P(x)$. Le résultat dépend-il du signe de $\cos x$?

Exercice S3 : Une somme connue

1. Montrer que, pour tout réel x , $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.
2. Soit $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ tel que $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$. Montrer que $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$.
3. Calculer $(\cos x - \sin x)^2$. Quel est le signe de $\cos x - \sin x$? En déduire la valeur de $\cos x - \sin x$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos x$ et de $\sin x$, puis vérifier que ces valeurs sont compatibles avec les hypothèses de l'énoncé.

Exercice S4 : Aiguilles d'une horloge

Une horloge est modélisée dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ dont l'origine est le centre de l'horloge, l'axe des ordonnées pointant vers 12 h et l'axe des abscisses vers 3 h. L'unité est le centimètre. L'aiguille des minutes mesure 10 cm et son extrémité est notée M ; l'aiguille des heures mesure 6 cm et son extrémité est notée H . À 12 h exactement, M a pour coordonnées $(0; 10)$. L'aiguille des minutes tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et fait un tour complet en 60 minutes.

1. Quel angle (en radians) décrit l'aiguille des minutes en t minutes? Justifier que, t minutes après 12 h, M a pour coordonnées $\left(10 \sin \frac{\pi t}{30}; 10 \cos \frac{\pi t}{30}\right)$.
2. Donner les coordonnées exactes de M à 12 h 10, à 12 h 25 et à 12 h 40.
3. Quelle est la longueur du chemin parcouru par M entre 12 h 10 et 12 h 25 (valeur exacte, puis arrondie au dixième de centimètre)?
4. À 4 h exactement, l'aiguille des minutes pointe vers 12 h. L'aiguille des heures fait un tour complet en 12 heures : quel angle a-t-elle décrit depuis 12 h? En déduire les coordonnées de H , puis la distance MH .
5. Montrer que, à tout instant, $OM = 10$.

Exercice S5 : Rampe et toit

1. Une rampe d'accès de longueur 6 m fait avec l'horizontale un angle de $\frac{\pi}{6}$ radian. Calculer la hauteur qu'elle permet de franchir et la longueur horizontale qu'elle occupe au sol (valeurs exactes).

- Le toit d'un abri a pour section un triangle ABC isocèle en A , de base $BC = 12$ m, dont les angles à la base $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ mesurent $\frac{\pi}{6}$. On note H le milieu de $[BC]$.
 - Justifier que le triangle ABH est rectangle en H . Calculer AB , puis la hauteur AH (valeurs exactes).
 - Calculer l'aire de la section du toit (valeur exacte, puis arrondie au dixième de mètre carré).
- On souhaite un autre toit, de même forme (triangle isocèle $A'B'C'$ en A'), avec des angles à la base de $\frac{\pi}{4}$ et une hauteur de 3 m. Calculer la largeur $B'C'$ et la longueur d'un rampant $A'B'$ (valeurs exactes).

Exercice S6 : Une grande roue

Une grande roue a pour rayon 10 m et son centre C est situé à 12 m au-dessus du sol. Elle tourne dans le sens direct, à vitesse constante, et fait un tour en 8 minutes. À l'instant $t = 0$ (en minutes), une nacelle N se trouve au point le plus bas de la roue. On munit le plan d'un repère orthonormé $(C; \vec{i}, \vec{j})$ d'origine C , dont l'axe des ordonnées est vertical et orienté vers le haut ; l'unité est le mètre.

- Quel angle, en radians, la nacelle décrit-elle en t minutes ? Justifier que, à l'instant t , la nacelle N a pour coordonnées $\left(10 \cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right); 10 \sin\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.
- En déduire que la hauteur de la nacelle au-dessus du sol est $h(t) = 12 - 10 \cos \frac{\pi t}{4}$.
- Calculer les valeurs exactes de $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$ et $h(4)$.
- Calculer $h(10)$ et $h(11)$ en ramenant l'angle à un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$. Que remarque-t-on pour $h(11)$ et $h(3)$? L'expliquer à l'aide de l'enroulement du cercle.
- Calculer la distance parcourue par la nacelle entre $t = 1$ et $t = 4$ (valeur exacte, puis arrondie au dixième de mètre), puis sa vitesse moyenne en mètres par minute (arrondie au dixième).

Exercice S7 : Mesure principale en Python

On considère la fonction suivante.

```
from math import pi

def mesure_principale(x):
    while x > pi:
        x = x - 2 * pi
    while x <= -pi:
        x = x + 2 * pi
    return x
```

- Pourquoi les réels x et $x - 2\pi$ ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ?
- Quelle valeur (arrondie au millièm) renvoie `mesure_principale(17 * pi / 3)` ? Combien de fois l'instruction `x = x - 2 * pi` est-elle exécutée ? Donner la valeur exacte correspondante.
- Même question pour `mesure_principale(-9 * pi / 4)`, avec l'instruction `x = x + 2 * pi`.
- Combien de fois l'instruction `x = x - 2 * pi` est-elle exécutée pour `mesure_principale(100)` ? Quelle valeur (arrondie au millièm) est renvoyée ?
- Justifier que la valeur renvoyée appartient toujours à $] - \pi; \pi]$, et que `mesure_principale(pi)` renvoie `pi` (on raisonne avec des nombres réels exacts, sans erreur d'arrondi).
- Écrire une fonction `coordonnees(x)` qui renvoie le couple $(\cos x; \sin x)$ des coordonnées du point $M(x)$, chaque coordonnée étant arrondie au millièm. Que renvoie `coordonnees(7 * pi / 6)` ?

Exercice S8 : Aire d'un polygone régulier inscrit

Soit $n \geq 3$ un entier. Un polygone régulier à n côtés $A_1 A_2 \dots A_n$ est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R .

- Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{A_1 O A_2}$? On le note θ .

2. Dans un repère orthonormé d'origine O où $A_1(R; 0)$, on a $A_2(R \cos \theta; R \sin \theta)$. En prenant $[OA_1]$ comme base, montrer que l'aire du triangle OA_1A_2 vaut $\frac{1}{2}R^2 \sin \theta$. En déduire que l'aire du polygone est $\mathcal{A}_n = \frac{n}{2}R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$.
3. On prend $R = 1$. Calculer les valeurs exactes de $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_8$ et $\mathcal{A}_{12}$, puis les ranger dans l'ordre croissant et les comparer à l'aire π du disque (on admet que $\pi > 3$).
4. Que vaut $\mathcal{A}_3$? Retrouver ce résultat avec le triangle de l'exercice S1.
5. On exécute le programme suivant.

```
from math import pi, sin
```

```
for n in [6, 12, 24, 48, 96]:
    print(n, round(n / 2 * sin(2 * pi / n), 4))
```

Il affiche, dans l'ordre, les valeurs 2,5981, 3,0, 3,1058, 3,1326 et 3,1394. Quelle conjecture peut-on formuler sur $\mathcal{A}_n$ lorsque n devient grand?

Exercice S9 : Octogone régulier

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. Pour $k \in \{0; 1; \dots; 7\}$, on note $A_k = M\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{k\pi}{4}$.

1. Donner les coordonnées exactes des huit points $A_0, \dots, A_7$, en indiquant pour chacun la valeur remarquable ou la symétrie utilisée.
2. Calculer $A_0A_1^2$, puis A_0A_2 (valeurs exactes).
3. Montrer que $A_0A_2A_4A_6$ est un carré. Donner son côté et son aire.
4. Soit K le milieu de $[A_0A_2]$. Calculer les coordonnées de K . Calculer $A_1A_2^2$: en déduire que le triangle $A_0A_1A_2$ est isocèle en A_1 , donc que $[A_1K]$ est sa hauteur issue de A_1 . Calculer A_1K , puis l'aire de ce triangle.
5. L'octogone $A_0A_1 \dots A_7$ est formé du carré $A_0A_2A_4A_6$ et de quatre triangles identiques à $A_0A_1A_2$. En déduire son aire et la comparer à $\mathcal{A}_8$ de l'exercice S8.