

Corrigé : Trigonométrie**Fiche Standard****S1.**

1. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont dans $] -\pi; \pi]$. Pour $\frac{3\pi}{2} : \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, de mesure principale $-\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées de $M(x)$ sont $(\cos x; \sin x)$:

- $A\left(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
- $B\left(\cos \frac{5\pi}{6}; \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, car $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $C = M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est le symétrique de $J = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ par rapport à l'axe des abscisses : $C(0; -1)$.

2. $AB = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$.

$$BC^2 = \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3, \text{ donc } BC = \sqrt{3}.$$

$$CA^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3, \text{ donc } CA = \sqrt{3}.$$

Les trois côtés ont la même longueur : ABC est équilatéral, de côté $\sqrt{3}$.

3. (AB) est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. La hauteur issue de C vaut $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$. Aire = $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. (Contrôle avec la formule du triangle équilatéral : $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3$.)

4. Le centre de gravité a pour coordonnées $\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{3}; \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1}{3}\right) = (0; 0)$: c'est O .

Conclusion : ABC est équilatéral de côté $\sqrt{3}$, d'aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, et son centre de gravité est O .

S2.

1. On utilise $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$:
 $P(x) = \sin x \times \sin x + (-\cos x) \times \cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$.
 Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $P(x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos^2 x$.
2. $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\cos^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{4}$ et $P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - 2 \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$. (Avec la première forme : $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.)
3. $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, donc $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
 $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ est le symétrique de $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ par rapport à l'axe des abscisses, et $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$:
 $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\cos^2\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.
4. Si $\sin x = \frac{3}{5}$, alors $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ et $P(x) = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$. (Avec la première forme : $\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.) Le résultat ne dépend pas du signe de $\cos x$, car seul $\cos^2 x$ intervient.

Conclusion : $P(x) = 1 - 2\cos^2 x$; $P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 0$; si $\sin x = \frac{3}{5}$, $P(x) = -\frac{7}{25}$ quel que soit le signe de $\cos x$.

S3.

1. $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$, car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. Avec $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} = 1 + 2 \sin x \cos x$, donc $2 \sin x \cos x = -\frac{3}{4}$ et $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$.
3. $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$. Pour $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$, le point $M(x)$ est dans le deuxième quadrant : $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$, donc $\cos x - \sin x < 0$. Ainsi $\cos x - \sin x = -\sqrt{\frac{7}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{2}$.
4. On additionne et on soustrait les égalités $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ et $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{2}$:
 $2 \cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$, donc $\cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$; $2 \sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$, donc $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$.
Vérification : $\cos x \approx -0,411 < 0$ et $\sin x \approx 0,911 > 0$, en accord avec le deuxième quadrant ;
 $\cos x + \sin x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{(1 - \sqrt{7})^2 + (1 + \sqrt{7})^2}{16} = \frac{16}{16} = 1$. Le point de coordonnées $\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{4}; \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \right)$ appartient donc au cercle trigonométrique, dans le deuxième quadrant : ces valeurs sont bien compatibles avec les hypothèses.

Conclusion : $\sin x \cos x = -\frac{3}{8}$, $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$ et $\sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$.

S4.

1. L'aiguille des minutes décrit 2π radians en 60 minutes, soit $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ radian par minute : en t minutes, elle décrit l'angle $u = \frac{\pi t}{30}$. À 12 h, $M = 10 \times J$, où $J = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. L'aiguille tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens indirect : t minutes après 12 h, M est le point $10 \times M\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$. Ses coordonnées sont $\left(10 \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right); 10 \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) = (10 \sin u; 10 \cos u)$.
2. • $t = 10$: $u = \frac{\pi}{3}$ et $M\left(10 \sin \frac{\pi}{3}; 10 \cos \frac{\pi}{3}\right) = (5\sqrt{3}; 5)$.
• $t = 25$: $u = \frac{5\pi}{6}$ et $M\left(10 \sin \frac{5\pi}{6}; 10 \cos \frac{5\pi}{6}\right) = (5; -5\sqrt{3})$.
• $t = 40$: $u = \frac{4\pi}{3}$ et $M\left(10 \sin \frac{4\pi}{3}; 10 \cos \frac{4\pi}{3}\right) = (-5\sqrt{3}; -5)$, car $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
3. Entre 12 h 10 et 12 h 25 s'écoulent 15 minutes, donc l'aiguille décrit l'angle $15 \times \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{2}$ radian. Sur un cercle de rayon 10 cm, l'arc parcouru mesure $\ell = R\alpha = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \approx 15,7$ cm.
4. En 12 heures, l'aiguille des heures décrit 2π radians. En 4 heures, elle décrit $\frac{4}{12} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$ radians, dans le sens indirect. Par le même raisonnement qu'à la question 1, $H = 6 \times M\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = 6 \times M\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, donc $H\left(6 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right); 6 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = (3\sqrt{3}; -3)$. Avec $M(0; 10)$: $MH^2 = (3\sqrt{3} - 0)^2 + (-3 - 10)^2 = 27 + 169 = 196$, donc $MH = 14$ cm.
5. $OM^2 = (10 \sin u)^2 + (10 \cos u)^2 = 100(\sin^2 u + \cos^2 u) = 100$, donc $OM = 10$: l'extrémité de l'aiguille reste sur le cercle de centre O et de rayon 10 cm.

Conclusion : $M(12 \text{ h } 10) = (5\sqrt{3}; 5)$, $M(12 \text{ h } 25) = (5; -5\sqrt{3})$, $M(12 \text{ h } 40) = (-5\sqrt{3}; -5)$; chemin de $5\pi \approx 15,7$ cm ; à 4 h, $H(3\sqrt{3}; -3)$ et $MH = 14$ cm ; $OM = 10$ à tout instant.

S5.

1. La rampe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de longueur 6 m, d'angle $\frac{\pi}{6}$ avec l'horizontale. La

hauteur est le côté opposé : $6 \sin \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ m. La longueur horizontale est le côté adjacent :

$$6 \cos \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ m.}$$

2. a) Le triangle ABC est isocèle en A : la médiane (AH) issue de A est aussi la hauteur, donc $(AH) \perp (BC)$ et ABH est rectangle en H , avec $BH = \frac{BC}{2} = 6$ m. Dans ce triangle, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{BH}{AB}$, donc $AB = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ m. De plus $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AB}$, donc $AH = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ m. (Contrôle : $AH^2 + BH^2 = 12 + 36 = 48 = AB^2$.)

b) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8 \text{ m}^2$.

3. Soit H' le milieu de $[B'C']$. Comme à la question 2, $A'B'H'$ est rectangle en H' , avec $A'H' = 3$ m et $\widehat{A'B'H'} = \frac{\pi}{4}$. Alors $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{A'H'}{A'B'}$, donc $A'B' = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ m $\approx 4,2$ m. Puis $B'H' = A'B' \cos \frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ m, et $B'C' = 2B'H' = 6$ m.

Conclusion : rampe : hauteur 3 m et longueur horizontale $3\sqrt{3}$ m ; premier toit : $AB = 4\sqrt{3}$ m, $AH = 2\sqrt{3}$ m, aire $12\sqrt{3} \approx 20,8 \text{ m}^2$; second toit : $B'C' = 6$ m et $A'B' = 3\sqrt{2}$ m.

S6.

1. La roue fait un tour (2π radians) en 8 minutes, soit $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ radian par minute : en t minutes, la nacelle décrit l'angle $\frac{\pi t}{4}$, dans le sens direct. À $t = 0$, la nacelle est au point le plus bas, de coordonnées $(0; -10) = 10 \times M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ dans le repère de centre C . À l'instant t , elle est donc en $10 \times M\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4}\right)$, de coordonnées $\left(10 \cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right); 10 \sin\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.
2. Le centre C est à 12 m du sol, donc $h(t) = 12 + 10 \sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$ avec $u = \frac{\pi t}{4}$. Or $\sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\cos u$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses, puis $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$). Donc $h(t) = 12 - 10 \cos \frac{\pi t}{4}$.
3. • $h(0) = 12 - 10 \cos 0 = 2$;
 • $h(1) = 12 - 10 \cos \frac{\pi}{4} = 12 - 5\sqrt{2} \approx 4,9$;
 • $h(2) = 12 - 10 \cos \frac{\pi}{2} = 12$;
 • $h(3) = 12 - 10 \cos \frac{3\pi}{4} = 12 + 10 \cos \frac{\pi}{4} = 12 + 5\sqrt{2} \approx 19,1$;
 • $h(4) = 12 - 10 \cos \pi = 22$.

La nacelle part du point le plus bas (2 m) et atteint le plus haut (22 m) après 4 minutes, soit un demi-tour.

4. $\frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, donc $\cos \frac{5\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $h(10) = 12$. De même $\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$, donc $\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4}$ et $h(11) = 12 + 5\sqrt{2} = h(3)$. Les réels $\frac{11\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ diffèrent de 2π : ils ont la même image sur le cercle trigonométrique, donc le même cosinus. Concrètement, $11 - 3 = 8$ minutes est la durée d'un tour : la nacelle retrouve la même position, donc la même hauteur.
5. Entre $t = 1$ et $t = 4$, il s'écoule 3 minutes, et la nacelle décrit l'angle $3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. La distance parcourue est la longueur de l'arc : $\ell = R\alpha = 10 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{2} \approx 23,6$ m. La vitesse moyenne est $\frac{15\pi/2}{3} = \frac{5\pi}{2} \approx 7,9$ m/min.

Conclusion : $h(t) = 12 - 10 \cos \frac{\pi t}{4}$; $h(0) = 2$, $h(1) = 12 - 5\sqrt{2}$, $h(2) = 12$, $h(3) = 12 + 5\sqrt{2}$, $h(4) = 22$;

$h(10) = 12$ et $h(11) = h(3)$; la nacelle parcourt $\frac{15\pi}{2} \approx 23,6$ m entre $t = 1$ et $t = 4$, à la vitesse moyenne $\frac{5\pi}{2} \approx 7,9$ m/min.

S7.

1. La longueur du cercle trigonométrique est 2π : passer de x à $x - 2\pi$ revient à retrancher un tour complet à l'enroulement de la droite des réels. On arrive donc au même point du cercle.
2. Les valeurs successives de x dans la première boucle sont $\frac{17\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ puis $-\frac{\pi}{3}$. Les trois premières sont strictement supérieures à π , la dernière ne l'est pas : l'instruction $x = x - 2 * \text{pi}$ est exécutée **3 fois**. La seconde boucle ne s'exécute pas ($-\frac{\pi}{3} > -\pi$). La fonction renvoie $-\frac{\pi}{3} \approx -1,047$.
3. Pour $x = -\frac{9\pi}{4}$, la première boucle ne s'exécute pas ($x < \pi$). Dans la seconde, $x \leq -\pi$: on ajoute 2π une fois (**1 fois**) et on obtient $-\frac{\pi}{4}$, qui est strictement supérieur à $-\pi$. La fonction renvoie $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$.
4. Après k soustractions, la valeur de x est $100 - 2k\pi$. La boucle continue tant que $100 - 2k\pi > \pi$, c'est-à-dire tant que $k < \frac{100 - \pi}{2\pi} \approx 15,4$. Pour $k = 15$, $100 - 30\pi \approx 5,75 > \pi$: la boucle continue ; pour $k = 16$, $100 - 32\pi \approx -0,531 \leq \pi$: elle s'arrête. L'instruction est exécutée **16 fois**, et la fonction renvoie $100 - 32\pi \approx -0,531$ (la seconde boucle ne s'exécute pas, car $-0,531 > -\pi$).
5. À la sortie de la première boucle, $x \leq \pi$. Si $x > -\pi$, la seconde boucle ne s'exécute pas et $x \in]-\pi ; \pi]$. Sinon $x \leq -\pi$: chaque passage dans la seconde boucle ajoute 2π , donc la boucle s'arrête au bout d'un nombre fini de passages, avec $x > -\pi$. Avant le dernier passage, on avait $x \leq -\pi$, donc après ce passage $x \leq -\pi + 2\pi = \pi$. Dans tous les cas la valeur renvoyée est dans $] -\pi ; \pi]$, et elle a la même image que la valeur initiale (on n'a ajouté ou retranché que des multiples de 2π). Pour $x = \pi$: $\pi > \pi$ est faux et $\pi \leq -\pi$ est faux, aucune boucle ne s'exécute, la fonction renvoie pi .
6. `from math import cos, sin`

`def coordonnees(x):`

`return (round(cos(x), 3), round(sin(x), 3))`

Pour $x = \frac{7\pi}{6}$: $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. La fonction renvoie $(-0.866, -0.5)$.

Conclusion : la fonction `mesure_principale` renvoie $-\frac{\pi}{3} \approx -1,047$ pour $\frac{17\pi}{3}$ (3 soustractions), $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$ pour $-\frac{9\pi}{4}$ (1 addition) et $\approx -0,531$ pour 100 (16 soustractions) ; pour $\frac{7\pi}{6}$, `coordonnees` renvoie $(-0.866, -0.5)$.

S8.

1. Les n sommets sont régulièrement répartis : $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Comme $n \geq 3$, $\theta \in \left]0 ; \frac{2\pi}{3}\right] \subset]0 ; \pi[$, donc $\sin \theta > 0$.
2. Le triangle OA_1A_2 a pour base $[OA_1]$, de longueur R , sur l'axe des abscisses. La hauteur issue de A_2 est l'ordonnée de A_2 : $R \sin \theta$. Aire = $\frac{1}{2}R \times R \sin \theta = \frac{1}{2}R^2 \sin \theta$. Les n triangles OA_kA_{k+1} sont isométriques (rotation de centre O), donc $\mathcal{A}_n = n \times \frac{1}{2}R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2}R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$.
3. Pour $R = 1$:
 - $\mathcal{A}_6 = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
 - $\mathcal{A}_8 = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$;
 - $\mathcal{A}_{12} = 6 \sin \frac{\pi}{6} = 3$.

Comparaison des carrés (nombres positifs) : $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} = 6,75$, $(2\sqrt{2})^2 = 8$, $3^2 = 9$. Donc

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{2} < 3 < \pi.$$

4. $\mathcal{A}_3 = \frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. C'est l'aire trouvée en S1 : le triangle ABC est inscrit dans le cercle trigonométrique ($R = 1$).
5. Les valeurs 2,5981, 3, 3,1058, 3,1326, 3,1394 croissent et se rapprochent de $\pi \approx 3,1416$. On conjecture que $\mathcal{A}_n$ est croissante et tend vers l'aire du disque, π , lorsque n devient grand.

Conclusion : $\mathcal{A}_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$; $\mathcal{A}_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\mathcal{A}_8 = 2\sqrt{2}$, $\mathcal{A}_{12} = 3$, tous inférieurs à π pour $R = 1$.

S9.

1. • $A_0 = I(1; 0)$, $A_2 = J(0; 1)$, $A_4(-1; 0)$, $A_6(0; -1)$ (points des axes);
- $A_1\left(\cos \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (valeur remarquable);
- $A_3 = M\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ est le symétrique de A_1 par rapport à l'axe des ordonnées : $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- $A_5 = M\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ est le symétrique de A_1 par rapport à O : $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- $A_7 = M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (car $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$) est le symétrique de A_1 par rapport à l'axe des abscisses : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. $A_0A_1^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$. $A_0A_2^2 = (0 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 2$, donc $A_0A_2 = \sqrt{2}$.
3. $A_0(1; 0)$, $A_2(0; 1)$, $A_4(-1; 0)$, $A_6(0; -1)$. Chacun des quatre côtés A_0A_2 , A_2A_4 , A_4A_6 , A_6A_0 a pour carré $1 + 1 = 2$: les quatre côtés ont pour longueur $\sqrt{2}$, donc $A_0A_2A_4A_6$ est un losange. Ses diagonales $[A_0A_4]$ et $[A_2A_6]$ ont pour longueur 2 : un losange dont les diagonales ont la même longueur est un carré. Son côté vaut $\sqrt{2}$ et son aire $(\sqrt{2})^2 = 2$.
4. $K\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. $A_1A_2^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2} = A_0A_1^2$: le triangle $A_0A_1A_2$ est isocèle en A_1 , donc la médiane $[A_1K]$ est aussi la hauteur issue de A_1 .
- $A_1K^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$, et $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$
- avec $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$: $A_1K = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Aire du triangle : $\frac{1}{2} \times A_0A_2 \times A_1K = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.
5. Aire de l'octogone = $2 + 4 \times \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 2 + 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}$. C'est la valeur de $\mathcal{A}_8$ obtenue en S8 (question 3) avec la formule $\frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$: les deux méthodes concordent.
- Conclusion :** $A_0A_1^2 = 2 - \sqrt{2}$, $A_0A_2 = \sqrt{2}$; $A_0A_2A_4A_6$ est un carré de côté $\sqrt{2}$ et d'aire 2; l'aire de l'octogone est $2\sqrt{2}$.