

Trigonométrie**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstration des valeurs remarquables

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On admet les propriétés $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x .

- Valeurs en $\frac{\pi}{4}$.** Montrer que $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$, puis en déduire leur valeur commune.
- Valeurs en $\frac{\pi}{3}$.** Soit $M = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et H son projeté orthogonal sur la droite (OI) .
 - Montrer que le triangle OIM est équilatéral.
 - En déduire que H est le milieu de $[OI]$, puis la valeur de $\cos \frac{\pi}{3}$, puis celle de $\sin \frac{\pi}{3}$.
- Valeurs en $\frac{\pi}{6}$.** Utiliser $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ pour déterminer $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.
- Pour aller plus loin, hors programme : un nouvel angle.** Soit $N = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et K le milieu de $[IN]$.
 - Calculer IN^2 à l'aide des coordonnées de I et N .
 - Le triangle OIN est isocèle en O : la droite (OK) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{ION}$, qui mesure $\frac{\pi}{4}$, et le triangle OKI est rectangle en K . En déduire que $IN = 2 \sin \frac{\pi}{8}$.
 - En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$, puis de $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice D2 : Doubler le nombre de côtés

Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique, de centre O . On note s_n la longueur de son côté. Soit $[AB]$ un côté, H son milieu et M le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ qui ne contient pas les autres sommets : M est un sommet du polygone régulier à $2n$ côtés, et $AM = s_{2n}$.

- Justifier que O, H, M sont alignés, que (OM) est perpendiculaire à (AB) , et que $OH = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$.
- En déduire $HM = 1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$, puis montrer que $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$.
- Pour $n = 6$ (hexagone), justifier que $s_6 = 1$. Calculer s_{12} , puis montrer que $s_{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.
- Dans le triangle OAH , l'angle en O mesure $\frac{\pi}{n}$. En déduire $s_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$, puis les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{12}$ et de $\cos \frac{\pi}{12}$.
- Le périmètre d'un polygone inscrit est inférieur à la circonférence 2π du cercle, donc $\frac{n s_n}{2} < \pi$. On exécute le programme suivant.

```
from math import sqrt

n, s = 6, 1.0
while n * s / 2 <= 3.14:
    n, s = 2 * n, sqrt(2 - sqrt(4 - s * s))
print(n, round(n * s / 2, 5))
```

Expliquer le rôle de la boucle, puis déterminer l'affichage obtenu. Que peut-on en conclure sur π ?

Exercice D3 : Un carré inscrit qui tourne

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ et $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique. Pour tout réel x , on pose $A = M(x)$, $B = M\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $C = M(x + \pi)$ et $D = M\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. On rappelle que

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ pour tout réel y .

1. En écrivant $x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (-x)$, montrer que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
2. En déduire les coordonnées de A , B , C et D en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
3. Montrer que $ABCD$ est un carré, dont on précisera le côté et l'aire (ils ne dépendent pas de x).
4. Donner les coordonnées de A , B , C et D pour $x = \frac{\pi}{4}$. Que remarque-t-on sur les côtés du carré ?
5. Montrer que, pour tout réel x , $\cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$. On pourra développer $(\cos x + \sin x)^2$ et $(\cos x - \sin x)^2$.
6. Montrer que, si $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$, alors $\cos x = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour quel point A la somme des coordonnées de A est-elle maximale ?

Exercice D4 : Sauts sur le cercle

Un point part de I et saute sur le cercle trigonométrique : à chaque saut, il avance de $\frac{5\pi}{6}$ le long du cercle, dans le sens direct. On note $P_n = M\left(\frac{5n\pi}{6}\right)$ sa position après n sauts ($n \in \mathbb{N}$; $P_0 = I$).

1. Donner la mesure principale de $\frac{5n\pi}{6}$ pour $n = 1, 2, 3, 4$, puis les coordonnées exactes de P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .
2. Montrer que $P_{n+12} = P_n$ pour tout entier naturel n .
3. On note r_n le reste de la division euclidienne de $5n$ par 12. Montrer que $P_n = M\left(\frac{r_n\pi}{6}\right)$.
4. Montrer que $P_0, P_1, \dots, P_{11}$ sont deux à deux distincts. On pourra supposer $P_m = P_n$ avec $0 \leq m < n \leq 11$, en déduire que 12 divise $5(n - m)$, et utiliser $25 = 2 \times 12 + 1$.
5. En déduire que $P_n = I$ si et seulement si n est un multiple de 12.
6. Le programme suivant doit renvoyer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $P_n = I$. Compléter la condition de la boucle `while`, puis donner la valeur renvoyée.

```
def premier_retour():
    n = 1
    while ..... :
        n = n + 1
    return n
```

7. Le point avance maintenant de $\frac{3\pi}{4}$ à chaque saut. Adapter la condition de la boucle et donner la valeur `n` renvoyée. Les points $P_0, \dots, P_{n-1}$ sont-ils deux à deux distincts ? (On admettra que $3 \times 3 = 9 = 8 + 1$ joue ici le rôle de $25 = 2 \times 12 + 1$.)

Exercice D5 : Arche d'un pont

Un pont franchit une rivière par une arche en forme d'arc de cercle. Les deux appuis A et B sont au niveau de l'eau, à 12 m l'un de l'autre. On note O le centre du cercle, R son rayon et H le milieu de $[AB]$. Le sommet S de l'arche est le point du cercle tel que H appartienne à $[OS]$; la hauteur de l'arche au-dessus de l'eau, mesurée en S , est $HS = 2$ m.

1. Justifier que (OH) est perpendiculaire à (AB) et que $OH = R - 2$. Appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OHA pour montrer que $R = 10$ m.
2. On note $\alpha = \widehat{AOH}$. Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$. On munit le plan du repère orthonormé d'origine O , dont l'axe des ordonnées est dirigé de O vers S et dont l'axe des abscisses est parallèle à (AB) et dirigé de A vers B (unité : le mètre). Donner les coordonnées de S , H , A et B . Vérifier que $A = 10 \times M\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, en justifiant $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$.
3. À la calculatrice (mode radian), déterminer α à 10^{-4} près. Justifier que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut 2α , puis calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ de l'arche, arrondie au centimètre.
4. De combien de centimètres l'arche est-elle plus longue que la distance AB ?

5. Un poteau vertical est planté sur $[AB]$, à 3 m de H , et soutient l'arche. Calculer sa hauteur, arrondie au centimètre.

Exercice D6 : Archimède : encadrer π par l'extérieur

On reprend les notations de l'exercice D2 : s_n est le côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O , $[AB]$ un côté de ce polygone, H son milieu et M le point où la demi-droite $[OH)$ coupe $\mathcal{C}$. On rappelle que $OH = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$. La tangente à $\mathcal{C}$ en M coupe les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ en A' et B' : $[A'B']$ est un côté du polygone régulier à n côtés circonscrit à $\mathcal{C}$ (on l'admet). On note $t_n = A'B'$.

- Justifier que $(A'B')$ est parallèle à (AB) . En déduire, avec le théorème de Thalès, que $t_n = \frac{s_n}{OH}$, puis que $t_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$.
- Pour $n = 6$, calculer t_6 , puis le demi-périmètre $\frac{6t_6}{2}$ de l'hexagone circonscrit.
- On admet que le périmètre d'un polygone convexe contenu dans un autre polygone convexe est inférieur au périmètre de ce dernier, et que cela reste vrai pour le cercle. Le périmètre de $\mathcal{C}$ est donc compris entre ceux des polygones inscrit et circonscrit. En déduire un encadrement de π à l'aide de $n = 6$.
- Pour $n = 12$, on a $s_{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ (exercice D2). Calculer OH , puis t_{12} , et montrer que le demi-périmètre du dodécagone circonscrit vaut $24 - 12\sqrt{3}$. Donner l'encadrement de π obtenu avec $n = 12$ (valeurs arrondies au dix-millième).
- On exécute le programme suivant.

```
from math import sqrt

n, s = 6, 1.0
for _ in range(4):
    n, s = 2 * n, sqrt(2 - sqrt(4 - s * s))
    inf = n * s / 2
    sup = n * s / sqrt(4 - s * s)
    print(n, round(inf, 5), round(sup, 5))
```

- Que représentent `inf` et `sup` ? Justifier la formule de `sup`.
- Le programme affiche les quatre lignes suivantes. Quel encadrement de π obtient-on pour $n = 96$? Quelle est son amplitude ?

```
12 3.10583 3.21539
24 3.13263 3.15966
48 3.13935 3.14609
96 3.14103 3.14271
```

- Archimède a obtenu, avec ce procédé et des polygones à 96 côtés, l'encadrement $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Vérifier que l'encadrement précédent est plus resserré.