

Corrigé : Trigonométrie

Fiche Défi

D1.

1. Avec $x = \frac{\pi}{4}$, la propriété $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ donne $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. Notons c cette valeur commune. Le point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est dans le premier quadrant, donc $c > 0$. De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 : 2c^2 = 1$, donc $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 2. a) On a $OI = OM = 1$ (rayon du cercle) et l'angle $\widehat{IOM}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Le triangle OIM est isocèle en O : ses deux angles à la base sont égaux et valent $\frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Les trois angles valent $\frac{\pi}{3}$: OIM est équilatéral, et $IM = 1$.
b) Dans un triangle équilatéral, le pied de la hauteur issue de M est le milieu du côté opposé : H est le milieu de $[OI]$, donc $OH = \frac{1}{2}$. Le projeté de M sur l'axe des abscisses a pour abscisse $\cos \frac{\pi}{3}$: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Alors $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, et $\sin \frac{\pi}{3} > 0$ (M est au-dessus de l'axe des abscisses) : $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 3. $\cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
 4. a) $I(1; 0)$ et $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) : IN^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$.
b) Dans le triangle OKI rectangle en K , l'hypoténuse est $OI = 1$ et l'angle $\widehat{KOI}$ vaut $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$. Donc $IK = OI \sin \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$ et $IN = 2IK = 2 \sin \frac{\pi}{8}$.
c) $4 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 2 - \sqrt{2}$, donc $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et, le sinus étant positif, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0,3827$.
Ensuite $\cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{8} > 0 : \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \approx 0,9239$.
- Conclusion :** $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

D2.

1. $OA = OB = 1$: O est sur la médiatrice de $[AB]$; H , milieu de $[AB]$, aussi; M , milieu de l'arc, aussi ($MA = MB$ par symétrie). Les points O, H, M sont donc sur la médiatrice de $[AB]$: ils sont alignés et $(OM) \perp (AB)$. Le triangle OHA est rectangle en H avec $AH = \frac{s_n}{2}$ et $OA = 1 : OH^2 = 1 - \frac{s_n^2}{4}$, d'où $OH = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$.
2. H est entre O et M avec $OM = 1 : HM = 1 - OH = 1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$. Le triangle AHM est rectangle en H :
$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = \frac{s_n^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

Or $2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} = \sqrt{4\left(1 - \frac{s_n^2}{4}\right)} = \sqrt{4 - s_n^2}$. Donc $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}$.
3. Pour $n = 6$, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et $OA = OB$: OAB est équilatéral (voir D1), donc $s_6 = 1$.

Alors $s_{12}^2 = 2 - \sqrt{4-1} = 2 - \sqrt{3}$ et $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Comme $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$ et que $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} > 0$, on a $s_{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

4. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure $\frac{2\pi}{n}$ et (OH) est sa bissectrice : $\widehat{AOH} = \frac{\pi}{n}$. Dans le triangle rectangle OAH , $AH = OA \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n}$, donc $s_n = 2AH = 2 \sin \frac{\pi}{n}$. Avec $n = 12$: $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{s_{12}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588$. Puis $\cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$ et $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 8+4\sqrt{3}$, donc (cosinus positif) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,9659$.

5. La boucle double le nombre de côtés (en calculant le nouveau côté avec la formule de la question 2) tant que le demi-périmètre $\frac{ns}{2}$ n'a pas dépassé 3,14. Valeurs successives du demi-périmètre : $n = 6$: 3 ; $n = 12$: 3,1058 ; $n = 24$: 3,1326 ; $n = 48$: 3,1394 ; $n = 96$: 3,14103, qui dépasse 3,14 : la boucle s'arrête. Le programme affiche 96 3.14103. Comme $\frac{96 s_{96}}{2} < \pi$, on conclut que $\pi > 3,141$.

Conclusion : $s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4-s_n^2}$; $s_{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; affichage 96 3.14103, d'où $\pi > 3,141$.

D3.

- $x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (-x)$. Avec $y = -x$: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = \sin(-x) = -\sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y = \cos(-x) = \cos x$.
- $A(\cos x ; \sin x)$. D'après la question 1, $B(-\sin x ; \cos x)$. $C = M(x + \pi)$ est le symétrique de A par rapport à O : $C(-\cos x ; -\sin x)$. Enfin $x + \frac{3\pi}{2} = (x + \pi) + \frac{\pi}{2}$: en appliquant la question 1 au réel $x + \pi$, $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin(x + \pi) = \sin x$ et $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(x + \pi) = -\cos x$, donc $D(\sin x ; -\cos x)$.
- Les quatre côtés ont pour carrés :
 $AB^2 = (-\sin x - \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$;
 $BC^2 = (-\cos x + \sin x)^2 + (-\sin x - \cos x)^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$;
 $CD^2 = (\sin x + \cos x)^2 + (-\cos x + \sin x)^2 = 2$;
 $DA^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$.
 Les quatre côtés ont pour longueur $\sqrt{2}$: $ABCD$ est un losange. De plus C est le symétrique de A par rapport à O et D celui de B : $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres de $\mathcal{C}$, donc $AC = BD = 2$. Un losange dont les diagonales ont la même longueur est un carré. Son côté vaut $\sqrt{2}$ et son aire $(\sqrt{2})^2 = 2$, quelle que soit la valeur de x .
- Pour $x = \frac{\pi}{4}$: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont horizontaux (ordonnées égales), $[BC]$ et $[DA]$ sont verticaux (abscisses égales) : le carré a ses côtés parallèles aux axes, et on retrouve $AB = \sqrt{2}$.
- $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ et $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$. Comme un carré est positif, $1 - 2 \sin x \cos x \geq 0$, soit $2 \sin x \cos x \leq 1$. Alors $(\cos x + \sin x)^2 \leq 2$, donc $|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}$ et en particulier $\cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$.
- Si $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$, alors $(\cos x + \sin x)^2 = 2$, donc $1 + 2 \sin x \cos x = 2$ et $2 \sin x \cos x = 1$. Alors $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 1 = 0$, donc $\cos x = \sin x$, et $2 \cos x = \sqrt{2}$: $\cos x = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le point A est alors $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Réciproquement, pour $x = \frac{\pi}{4}$, la somme vaut bien $\sqrt{2}$. La somme

des coordonnées de A est donc maximale, égale à $\sqrt{2}$, si et seulement si $A = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$: c'est le cas où le carré a ses côtés parallèles aux axes.

Conclusion : $A(\cos x; \sin x)$, $B(-\sin x; \cos x)$, $C(-\cos x; -\sin x)$, $D(\sin x; -\cos x)$; $ABCD$ est un carré de côté $\sqrt{2}$ et d'aire 2; $\cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$, avec égalité exactement pour $A = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

D4.

- $n = 1 : \frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$, mesure principale $\frac{5\pi}{6}$; $P_1\left(\cos \frac{5\pi}{6}; \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 • $n = 2 : \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$; $P_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 • $n = 3 : \frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2}$; $P_3(0; 1)$.
 • $n = 4 : \frac{10\pi}{3} - 4\pi = -\frac{2\pi}{3}$; $P_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 2. $\frac{5(n+12)\pi}{6} = \frac{5n\pi}{6} + 10\pi = \frac{5n\pi}{6} + 5 \times 2\pi$: les deux réels diffèrent d'un multiple entier de 2π , donc ont la même image : $P_{n+12} = P_n$.
 3. On écrit $5n = 12q_n + r_n$ avec $q_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r_n \leq 11$. Alors $\frac{5n\pi}{6} = \frac{12q_n\pi}{6} + \frac{r_n\pi}{6} = q_n \times 2\pi + \frac{r_n\pi}{6}$, donc $\frac{5n\pi}{6}$ et $\frac{r_n\pi}{6}$ ont la même image : $P_n = M\left(\frac{r_n\pi}{6}\right)$.
 4. Supposons $P_m = P_n$ avec $0 \leq m < n \leq 11$. Les réels $\frac{r_m\pi}{6}$ et $\frac{r_n\pi}{6}$ appartiennent à $[0; 2\pi[$ (car $0 \leq r \leq 11$) et ont la même image; deux réels de $[0; 2\pi[$ qui ont la même image sont égaux, donc $r_m = r_n$. Alors 12 divise $5n - 5m = 5(n - m)$, donc divise aussi $5 \times 5(n - m) = 25(n - m)$. Comme $24(n - m)$ est un multiple de 12, la différence $25(n - m) - 24(n - m) = n - m$ est un multiple de 12. Or $0 < n - m < 12$: c'est impossible. Donc $P_0, \dots, P_{11}$ sont deux à deux distincts; ce sont les 12 points $M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$, $k = 0, \dots, 11$ (leurs restes r_n prennent les 12 valeurs distinctes $0, \dots, 11$).
 5. $P_n = I = M(0)$ si et seulement si $\frac{r_n\pi}{6}$ a pour image I ; comme $\frac{r_n\pi}{6} \in [0; 2\pi[$, cela équivaut à $r_n = 0$, c'est-à-dire à $12 \mid 5n$. Si $12 \mid 5n$, alors 12 divise $5 \times 5n - 24n = n$; réciproquement, si $12 \mid n$ alors $12 \mid 5n$. Donc $P_n = I \iff 12 \mid n$.
 6. La boucle doit continuer tant que $P_n \neq I$, c'est-à-dire tant que 12 ne divise pas $5n$:

```
def premier_retour():
    n = 1
    while (5 * n) % 12 != 0:
        n = n + 1
    return n
```

D'après la question 5, le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $P_n = I$ est 12 : le programme renvoie 12.

- On remplace la condition par $(3 * n) \% 8 != 0$. Comme $3 \times 3 = 9 = 8 + 1$, le même raisonnement donne : 8 divise $3n$ si et seulement si 8 divise n . Le programme renvoie 8. Les restes de $3n$ par 8 pour $n = 0, \dots, 7$ sont $0, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5$: ils sont distincts, donc $P_0, \dots, P_7$ sont deux à deux distincts (ce sont les huit points $M\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ de l'octogone de l'exercice S9).

Conclusion : $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_3(0; 1)$, $P_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; le point revient en I pour la première fois après 12 sauts, après avoir visité les 12 points $M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$; avec des sauts de $\frac{3\pi}{4}$, il revient après 8 sauts, en ayant visité les 8 points $M\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

D5.

1. $OA = OB = R$: O est sur la médiatrice de $[AB]$, ainsi que H , milieu de $[AB]$. La droite (OH) est donc la médiatrice de $[AB]$ et $(OH) \perp (AB)$. Le sommet S du cercle est sur la droite (OH) avec $H \in [OS]$ et $OS = R$: $OH = OS - HS = R - 2$. Le triangle OHA est rectangle en H avec $HA = 6$ et $OA = R$: $R^2 = (R - 2)^2 + 6^2 = R^2 - 4R + 4 + 36$, donc $4R = 40$ et $R = 10$ m. Alors $OH = 8$ m.
2. Dans le triangle OHA rectangle en H : $\sin \alpha = \frac{HA}{OA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $\cos \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Dans le repère indiqué : $S(0; 10)$, $H(0; 8)$, $A(-6; 8)$ et $B(6; 8)$. Ensuite, $\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (-\alpha)$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Ainsi $10 \times M\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = (-6; 8) = A$.
3. À la calculatrice, $\alpha = \sin^{-1}(0,6) \approx 0,6435$ rad. La droite (OH) est la médiatrice de $[AB]$ et $OA = OB$: (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, donc $\widehat{AOB} = 2\alpha \approx 1,2870$ rad. La longueur de l'arc est $\ell = R \times 2\alpha = 20\alpha \approx 12,870$ m, soit 12,87 m au centimètre près.
4. $12,87 - 12 = 0,87$ m : l'arche est plus longue de 87 cm que la distance AB .
5. Le pied du poteau est le point $P_0(3; 8)$ de $[AB]$. Le sommet du poteau est le point $P(3; y)$ de l'arche, avec $y > 0$ et $OP = 10$: $3^2 + y^2 = 100$, donc $y = \sqrt{91} \approx 9,539$. La hauteur du poteau est $y - 8 = \sqrt{91} - 8 \approx 1,54$ m.

Conclusion : $R = 10$ m ; $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $S(0; 10)$, $A(-6; 8)$, $B(6; 8)$; $\alpha \approx 0,6435$ rad ; arc $\approx 12,87$ m, soit 87 cm de plus que AB ; poteau de $\sqrt{91} - 8 \approx 1,54$ m.

D6.

1. La tangente $(A'B')$ est perpendiculaire au rayon (OM) ; la droite (AB) est elle aussi perpendiculaire à $(OH) = (OM)$ (exercice D2, question 1). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : $(A'B') \parallel (AB)$. Les points A et B sont sur les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ et H sur $[OM)$: d'après le théorème de Thalès dans le triangle $OA'B'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OM}{OH}$, soit $\frac{t_n}{s_n} = \frac{1}{OH}$ et $t_n = \frac{s_n}{OH}$. Avec $OH = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - s_n^2}}{2}$: $t_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$.
2. Pour $n = 6$, $s_6 = 1$: $t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Le demi-périmètre de l'hexagone circonscrit vaut $\frac{6t_6}{2} = 3t_6 = 2\sqrt{3} \approx 3,4641$.
3. Le demi-périmètre de l'hexagone inscrit vaut $\frac{6s_6}{2} = 3$. Le périmètre de $\mathcal{C}$, égal à 2π , est compris entre les périmètres de l'hexagone inscrit et de l'hexagone circonscrit : $6 < 2\pi < 4\sqrt{3}$, soit $3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3,4641$.
4. $s_{12}^2 = 2 - \sqrt{3}$, donc $OH = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (car $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ et ce nombre est positif). Alors $t_{12} = \frac{s_{12}}{OH} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$. Le demi-périmètre du dodécagone circonscrit est $\frac{12t_{12}}{2} = 6(4 - 2\sqrt{3}) = 24 - 12\sqrt{3} \approx 3,2154$. Le demi-périmètre du dodécagone inscrit est $\frac{12s_{12}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 3,1058$. D'où $3,1058 < \pi < 3,2154$.
5. a) À chaque tour de boucle, n double et s est remplacé par le côté du polygone à $2n$ côtés (formule de l'exercice D2). $\inf$ est le demi-périmètre $\frac{ns_n}{2}$ du polygone inscrit et $\sup$ celui du polygone circonscrit : $\frac{nt_n}{2} = \frac{n}{2} \times \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}} = \frac{ns_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$, ce qui est la formule de $\sup$.

b) Pour $n = 96$: $3,14103 < \pi < 3,14271$, d'amplitude $3,14271 - 3,14103 = 0,00168 < 2 \times 10^{-3}$.

c) $\frac{223}{71} \approx 3,14085 < 3,14103$ et $\frac{22}{7} \approx 3,14286 > 3,14271$: l'encadrement obtenu est strictement contenu dans celui d'Archimède, donc plus resserré.

Conclusion : $t_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$; $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ avec l'hexagone, $3,1058 < \pi < 3,2154$ avec le dodécagone, $3,14103 < \pi < 3,14271$ avec 96 côtés.