

Corrigé : Trigonométrie**Fiche Bases****B1.**

- On multiplie par $\frac{\pi}{180}$: $20^\circ = \frac{20\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$; $150^\circ = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$; $225^\circ = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$; $18^\circ = \frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}$.
- On multiplie par $\frac{180}{\pi}$: $\frac{7\pi}{6} = 7 \times 30^\circ = 210^\circ$; $\frac{3\pi}{10} = 3 \times 18^\circ = 54^\circ$; $\frac{11\pi}{12} = 11 \times 15^\circ = 165^\circ$; $\frac{5\pi}{9} = 5 \times 20^\circ = 100^\circ$.
- On retranche ou on ajoute des multiples de 2π jusqu'à tomber dans $] -\pi ; \pi]$.
 - $\frac{17\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \frac{18\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 3 \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3} \in] -\pi ; \pi]$: mesure principale $-\frac{\pi}{3}$.
 - $-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{9\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$: mesure principale $-\frac{\pi}{4}$.
 - $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} > \pi$, donc on retranche encore 2π : $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$. Mesure principale $-\frac{2\pi}{3}$.
 - $-\frac{7\pi}{2} + 4\pi = \frac{\pi}{2}$: mesure principale $\frac{\pi}{2}$.
 - $2027\pi = \pi + 2026\pi = \pi + 1013 \times 2\pi$: mesure principale π .

Conclusion : $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{10}$; $210^\circ, 54^\circ, 165^\circ, 100^\circ$; $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

B2. Deux points consécutifs sont séparés par un arc de longueur $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. En partant de I (réel 0), les points $A, B, J, C, D, E, F, G, H, K, L$ sont associés à $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \dots, \frac{11\pi}{6}$.

- D est associé à $\frac{5\pi}{6} \in] -\pi ; \pi]$: mesure principale $\frac{5\pi}{6}$. G est associé à $\frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$, de mesure principale $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$. K est associé à $\frac{5\pi}{3}$, de mesure principale $-\frac{\pi}{3}$. L est associé à $\frac{11\pi}{6}$, de mesure principale $-\frac{\pi}{6}$.
- C est associé à $\frac{2\pi}{3}$: $C \left(\cos \frac{2\pi}{3} ; \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. F est associé à $\frac{7\pi}{6}$: $F \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} \right)$.
- Les points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont C et G (réels $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$). Les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$ sont A et D (réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$).

Conclusion : $D \leftrightarrow \frac{5\pi}{6}$, $G \leftrightarrow -\frac{2\pi}{3}$, $K \leftrightarrow -\frac{\pi}{3}$, $L \leftrightarrow -\frac{\pi}{6}$; $C \left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $F \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} \right)$; abscisse $-\frac{1}{2}$: C et G ; ordonnée $\frac{1}{2}$: A et D .

B3.

- $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, car $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
- $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, car $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
- $\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, car $M(-x)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des abscisses : $\cos(-x) = \cos x$.
- $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, donc $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (les réels $\frac{11\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ ont la même image, puis $\sin(-x) = -\sin x$).
- $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{\pi}{3} + 4 \times 2\pi$, donc $\cos \frac{25\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (les deux réels ont la même image sur le cercle).

6. $-\frac{7\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4}$, donc $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (les deux réels ont la même image sur le cercle).

Conclusion : $-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B4. Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

1. $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, donc $\cos x = \pm \frac{12}{13}$. Pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, le point $M(x)$ est dans le demi-plan à gauche de l'axe des ordonnées (ou sur celui-ci) : $\cos x \leq 0$. Donc $\cos x = -\frac{12}{13}$.

2. $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, donc $\sin x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. Pour $x \in [-\pi; 0]$, $M(x)$ est dans le demi-plan inférieur : $\sin x \leq 0$. Donc $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

3. $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\cos x = \pm \frac{4}{5}$. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $M(x)$ est à droite de l'axe des ordonnées : $\cos x > 0$. Donc $\cos x = \frac{4}{5}$.

4. Si $\cos x = 0,6$ et $\sin x = 0,7$, alors $\cos^2 x + \sin^2 x = 0,36 + 0,49 = 0,85 \neq 1$, ce qui est impossible.

Conclusion : $\cos x = -\frac{12}{13}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos x = \frac{4}{5}$; non, un tel réel n'existe pas.

B5.

1. $\ell = R\alpha = 8 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} \approx 20,9$ cm.

2. $\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{12}{4} = 3$ rad. En degrés : $3 \times \frac{180}{\pi} = \frac{540}{\pi} \approx 171,9^\circ$.

3. Entre 10 h 05 et 10 h 25, il s'écoule 20 minutes, soit $\frac{1}{3}$ de tour. L'angle balayé est $\frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$ rad, et la distance parcourue par l'extrémité est $\ell = 9 \times \frac{2\pi}{3} = 6\pi \approx 18,8$ cm.

4. $75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ rad. De $\ell = R\alpha$ on tire $R = \frac{\ell}{\alpha} = \frac{5\pi}{\frac{5\pi}{12}} = 12$ cm.

Conclusion : arc de $\frac{20\pi}{3} \approx 20,9$ cm; angle de 3 rad ($\approx 171,9^\circ$); l'extrémité de l'aiguille parcourt $6\pi \approx 18,8$ cm; rayon de 12 cm.

B6.

1. Pour $x = \frac{\pi}{6}$:

- $-x = -\frac{\pi}{6}$: symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des abscisses, donc $\cos(-x) = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(-x) = -\sin x = -\frac{1}{2}$;
- $\pi - x = \frac{5\pi}{6}$: symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées, donc $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{1}{2}$;
- $\pi + x = \frac{7\pi}{6}$: symétrique de $M(x)$ par rapport à O , donc $\cos(\pi + x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{1}{2}$;
- $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{3}$: symétrique de $M(x)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réel	$x = \frac{\pi}{6}$	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sinus	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Avec $x = \frac{\pi}{5}$:

- $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} : \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} \approx -0,809$;
- $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5} : \sin \frac{6\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{5} \approx -0,588$;
- $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{5} \approx 0,809$;
- $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} : \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} \approx 0,809$.

Conclusion : voir le tableau ; $\cos \frac{4\pi}{5} \approx -0,809$, $\sin \frac{6\pi}{5} \approx -0,588$, $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) \approx 0,809$, $\sin \frac{3\pi}{10} \approx 0,809$.

B7.

1. On situe chaque réel entre deux multiples de $\frac{\pi}{2}$, après réduction éventuelle de $2k\pi$ (on rappelle

$$\frac{\pi}{2} \approx 1,57, \pi \approx 3,14, \frac{3\pi}{2} \approx 4,71).$$

- $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \pi$ (car $\frac{1}{2} < \frac{5}{7} < 1$) : deuxième quadrant, $\cos < 0$ et $\sin > 0$.
- $\frac{3\pi}{2} < \frac{9\pi}{5} < 2\pi$ (car $\frac{3}{2} < \frac{9}{5} < 2$) : quatrième quadrant, $\cos > 0$ et $\sin < 0$.
- $-\pi < -2 < -\frac{\pi}{2}$ (car $1,57 < 2 < 3,14$) : troisième quadrant, $\cos < 0$ et $\sin < 0$.
- $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ (car $3,14 < 4 < 4,71$) : troisième quadrant, $\cos < 0$ et $\sin < 0$.
- $-\frac{13\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\pi$ a la même image que $-\frac{\pi}{6}$: quatrième quadrant, $\cos > 0$ et $\sin < 0$.

2. Pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$.

- $\cos(\pi - x) = -\cos x < 0$;
- $\sin(\pi + x) = -\sin x < 0$;
- $\cos(-x) = \cos x > 0$;
- $\sin x \cos(\pi - x) = -\sin x \cos x < 0$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x > 0$.

Conclusion : signes (cosinus ; sinus) : $\frac{5\pi}{7} : (-; +)$; $\frac{9\pi}{5} : (+; -)$; $-2 : (-; -)$; $4 : (-; -)$; $-\frac{13\pi}{6} : (+; -)$. Pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, les cinq nombres de la question 2 sont respectivement négatif, négatif, positif, négatif et positif.

B8.

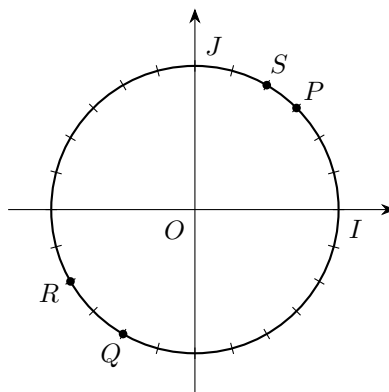
1. a) Le triangle ABC est rectangle en B : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 144 + 25 = 169$, donc $AC = 13$.

$$\text{Dans ce triangle, } \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13} \text{ et } \sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Vérification : } \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144 + 25}{169} = 1.$$

b) Le triangle OHM est rectangle en H , son hypoténuse est $OM = 1$ et l'angle en O vaut α .
Donc $OH = OM \cos \alpha = \cos \alpha$ et $HM = OM \sin \alpha = \sin \alpha$, ce qui retrouve les coordonnées $(\cos \alpha ; \sin \alpha)$ de M (le point M est dans le quart de plan $x > 0, y > 0$). Avec la question précédente, $M\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$.

2. Dans le triangle DEF : $DE = DF \cos \frac{\pi}{6} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ et $EF = DF \sin \frac{\pi}{6} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$.
Vérification : $DE^2 + EF^2 = 48 + 16 = 64 = DF^2$.
3. a) Un cran de la graduation correspond à $\frac{\pi}{12}$, soit 15° . On compte donc : P est 3 crans après I dans le sens direct ($\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12}$); Q est 8 crans après I dans le sens indirect ($\frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{12}$); R est 14 crans après I dans le sens direct ($\frac{7\pi}{6} = \frac{14\pi}{12}$); comme $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$, S est le point associé à $\frac{\pi}{3}$, soit 4 crans après I dans le sens direct.



b) $P\left(\cos \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Pour R : $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, donc $R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Conclusion : $AC = 13$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $M\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$; $DE = 4\sqrt{3}$ et $EF = 4$; $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

B9.

1. Vrai : c'est la propriété $\sin(\pi - x) = \sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, qui conserve l'ordonnée).
2. Faux : $\cos(x + \pi) = -\cos x$. Contre-exemple : $x = 0$ donne $\cos \pi = -1 \neq 1 = \cos 0$.
3. Faux : pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, et $-1,3 < -1$. La négation est : « pour tout réel x , $\sin x \neq -1,3$ », qui est vraie.
4. Vrai : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. (C'est aussi $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ avec $x = \frac{\pi}{3}$.)
5. Vrai : $\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$.
6. Faux : $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ a pour image $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, alors que $-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi$ a pour image le symétrique de $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ par rapport à O . Plus précisément, $\frac{7\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 3\pi$ n'est pas un multiple entier de 2π .

Conclusion : V, F, F, V, V, F.

B10.

1. $k = 2 : x = \frac{\pi}{3}$; $k = 5 : x = \frac{5\pi}{6}$; $k = 8 : x = \frac{4\pi}{3}$.
2. Le programme affiche

```
2 0.5 0.866
5 -0.866 0.5
```

8 -0.5 -0.866

Ces valeurs sont $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$; $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Programme :

```
from math import pi
```

```
def rad(d):  
    return d * pi / 180
```

rad(150) renvoie $\frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,618$.