

Fiche 3 : cosinus, sinus, valeurs remarquables et angles associés

Sept exercices pour maîtriser le **cosinus**, le **sinus**, les **valeurs remarquables** et les **angles associés** :

- le tableau des valeurs remarquables ;
- angles associés lus sur le cercle ;
- retrouver **sin** x connaissant **cos** x ;
- simplifier des expressions ;
- démontrer **cos** et **sin** de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$;
- le lien avec le triangle rectangle ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **symétrie** utilisée est nommée ;
- le calcul est fait **ligne par ligne** ;
- le **signe** est justifié avec la position du point sur le cercle.

Le modèle de rédaction pour calculer un cosinus ou un sinus

« $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). »

- **Écris** l'angle sous la forme $\pi - x$, $\pi + x$, $-x$ ou $x + 2k\pi$.
- **Nomme** la symétrie ou la formule.
- **Conclus** avec la valeur exacte.

Les pièges classiques

- Se tromper de signe : $\cos \frac{5\pi}{6}$ est **négatif** (point à gauche de l'axe des ordonnées).
- Échanger les valeurs de $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.
- Oublier de choisir le signe de **sin** x après $\sin^2 x = \dots$
- Utiliser la calculatrice en degrés.

Un cosinus qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$, c'est un faux ami : relis ton cercle.

Exercice 1 (★) : le tableau des valeurs remarquables

1. Compléter le tableau.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	?	?	?	?	?	?	?
$\sin x$	?	?	?	?	?	?	?

2. Vérifier que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans chaque colonne contenant une racine carrée.**Exercice 2 (★★) : angles associés**

Donner la valeur exacte de, en nommant la symétrie utilisée :

- $\cos \frac{5\pi}{6}$;
- $\sin \frac{7\pi}{6}$;
- $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
- $\sin \frac{2\pi}{3}$;
- $\cos \frac{13\pi}{3}$;
- $\sin \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;
- $\cos \frac{11\pi}{6}$;
- $\sin \left(-\frac{17\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 (★★) : retrouver $\sin x$ ou $\cos x$

- Soit $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$.
- Soit $x \in]-\pi; 0[$ tel que $\cos x = -\frac{1}{3}$. Calculer $\sin x$.
- Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ tel que $\sin x = -\frac{5}{13}$. Calculer $\cos x$.
- Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{1}{4}$. Calculer $\cos x$.
- Avec le réel x de la question 1, calculer $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin(-x)$.

Exercice 4 (★★) : simplifier avec les angles associés

1. Simplifier, pour tout réel x :

a. $A(x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

b. $B(x) = \sin(-x) + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

c. $C(x) = \cos^2(\pi - x) + \sin^2(\pi + x)$.

2. Calculer $E = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$ sans calculatrice.

Exercice 5 (★★★) : démontrer les valeurs remarquables (démonstration au programme)

1. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Calculer AC . Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$? En déduire $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.

2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2 et H le milieu de $[BC]$. Justifier que ABH est rectangle en H , calculer AH et donner les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.

3. Retrouver $\cos \frac{\pi}{4}$ en utilisant seulement le cercle trigonométrique et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 6 (★★) : le lien avec le triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A avec $AB = 3$ et $AC = 4$. On note $\beta = \widehat{ABC}$ (en radians).

1. Calculer BC , puis $\cos \beta$ et $\sin \beta$.

2. Montrer que le point de coordonnées $(\cos \beta ; \sin \beta)$ est bien sur le cercle trigonométrique. Donner une valeur approchée de β en radians (calculatrice en mode radian) et en degrés.

3. On note $\gamma = \widehat{ACB}$. Exprimer γ en fonction de β , puis comparer $\cos \gamma$ et $\sin \beta$.

4. Un triangle rectangle a une hypoténuse de 10 cm et un angle aigu de $\frac{\pi}{6}$ rad. Calculer les longueurs des deux autres côtés.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
2. $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$.
3. $\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
4. Il existe un réel x tel que $\cos x = 0,6$ et $\sin x = 0,7$.
5. Pour tout réel x , $\sin(\pi + x) = \sin x$.
6. $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Connaître** le tableau des valeurs remarquables (exercice 1).
- **Calculer** avec les angles associés en nommant la symétrie (exercices 2 et 4).
- **Retrouver** un sinus ou un cosinus avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et le signe (exercice 3).
- **Démontrer** cos et sin de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$ (exercice 5).
- **Utiliser** cosinus et sinus dans un triangle rectangle (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question1. $\cos \frac{2\pi}{3}$ vaut :

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin \frac{5\pi}{4}$ vaut :

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $-\frac{1}{2}$

3. Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$, alors $\cos x$ vaut :

A. $\frac{4}{5}$

B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{16}{25}$

D. $-\frac{16}{25}$

4. Pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à :

A. $\cos x$

B. $-\cos x$

C. $\sin x$

D. $-\sin x$

5. Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α , $\cos \alpha$ est égal à :

A. $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

B. $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

C. $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

D. $\frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}}$