

Fiche 3 : cosinus, sinus, valeurs remarquables et angles associés

Sept exercices pour maîtriser le **cosinus**, le **sinus**, les **valeurs remarquables** et les **angles associés** :

- le tableau des valeurs remarquables ;
- angles associés lus sur le cercle ;
- retrouver **sin** x connaissant **cos** x ;
- simplifier des expressions ;
- démontrer **cos** et **sin** de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$;
- le lien avec le triangle rectangle ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **symétrie** utilisée est nommée ;
- le calcul est fait **ligne par ligne** ;
- le **signe** est justifié avec la position du point sur le cercle.

Le modèle de rédaction pour calculer un cosinus ou un sinus

« $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). »

- **Écris** l'angle sous la forme $\pi - x$, $\pi + x$, $-x$ ou $x + 2k\pi$.
- **Nomme** la symétrie ou la formule.
- **Conclus** avec la valeur exacte.

Les pièges classiques

- Se tromper de signe : $\cos \frac{5\pi}{6}$ est **négatif** (point à gauche de l'axe des ordonnées).
- Échanger les valeurs de $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.
- Oublier de choisir le signe de **sin** x après $\sin^2 x = \dots$
- Utiliser la calculatrice en degrés.

Un cosinus qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$, c'est un faux ami : relis ton cercle.

Exercice 1 (★) : le tableau des valeurs remarquables

1. Compléter le tableau.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	?	?	?	?	?	?	?
$\sin x$	?	?	?	?	?	?	?

2. Vérifier que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans chaque colonne contenant une racine carrée.**Correction de l'exercice 1**

Question 1

On lit les coordonnées du point $M(x)$ sur le cercle : I, J, I', J' pour $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, et les valeurs remarquables pour les autres.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

Question 2

$$x = \frac{\pi}{6} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

$$x = \frac{\pi}{4} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

$$x = \frac{\pi}{3} : \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Dans chaque colonne, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 2 (★★) : angles associés

Donner la valeur exacte de, en nommant la symétrie utilisée :

1. $\cos \frac{5\pi}{6}$;

2. $\sin \frac{7\pi}{6}$;

3. $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4. $\sin \frac{2\pi}{3}$;

5. $\cos \frac{13\pi}{3}$;

6. $\sin \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;

7. $\cos \frac{11\pi}{6}$;

8. $\sin \left(-\frac{17\pi}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} \text{ (symétrie par rapport à } (OJ)).$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question 2

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \text{ (symétrie par rapport à } O).$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Question 3

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \text{ (symétrie par rapport à } (OI), \text{ qui conserve l'abscisse).}$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Question 4

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \text{ (symétrie par rapport à } (OJ), \text{ qui conserve l'ordonnée).}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question 5

$$\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi : \text{ deux tours complets, donc } M\left(\frac{13\pi}{3}\right) = M\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\cos \frac{13\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Question 6

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}, \text{ donc } \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4}.$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \text{ (symétrie par rapport à } (OJ)).$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Question 7

$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, donc $M\left(\frac{11\pi}{6}\right) = M\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, symétrique de $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ par rapport à (OI) : même abscisse.

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question 8

$$-\frac{17\pi}{6} + 4\pi = -\frac{17\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \text{ donc } \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \sin \frac{7\pi}{6}.$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} \text{ (symétrie par rapport à } O).$$

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3 (★★) : retrouver $\sin x$ ou $\cos x$

1. Soit $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$.
2. Soit $x \in]-\pi; 0[$ tel que $\cos x = -\frac{1}{3}$. Calculer $\sin x$.
3. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ tel que $\sin x = -\frac{5}{13}$. Calculer $\cos x$.
4. Soit $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ tel que $\sin x = \frac{1}{4}$. Calculer $\cos x$.
5. Avec le réel x de la question 1, calculer $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi + x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin(-x)$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Donc $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, d'où $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Pour $x \in [0; \pi]$, le point $M(x)$ est dans le demi-plan supérieur : $\sin x \geq 0$.

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

Question 2

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \text{ donc } \sin x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (car } \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\text{)}.$$

Pour $x \in]-\pi; 0[$, $M(x)$ est dans le demi-plan inférieur : $\sin x < 0$.

$$\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Question 3

$$\cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}, \text{ donc } \cos x = \pm \frac{12}{13}.$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, $M(x)$ est dans le quatrième quadrant : $\cos x > 0$.

$$\cos x = \frac{12}{13}$$

Question 4

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}, \text{ donc } \cos x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Pour $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, $M(x)$ est dans le deuxième quadrant : $\cos x < 0$.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Question 5

$$\text{On a } \cos x = \frac{3}{5} \text{ et } \sin x = \frac{4}{5}.$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5}; \sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{4}{5}; \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{4}{5};$$

$$\sin(-x) = -\sin x = -\frac{4}{5}.$$

$$\cos(\pi - x) = -\frac{3}{5}; \sin(\pi + x) = -\frac{4}{5}; \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{4}{5}; \sin(-x) = -\frac{4}{5}.$$

Exercice 4 (★★) : simplifier avec les angles associés

1. Simplifier, pour tout réel x :

a. $A(x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

b. $B(x) = \sin(-x) + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

c. $C(x) = \cos^2(\pi - x) + \sin^2(\pi + x)$.

2. Calculer $E = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$ sans calculatrice.

Correction de l'exercice 4

Question 1.a

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \cos(\pi + x) = -\cos x \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$A(x) = -\cos x - \cos x + \cos x.$$

$$A(x) = -\cos x$$

Question 1.b

$$\sin(-x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

$$B(x) = -\sin x + \sin x - \sin x.$$

$$B(x) = -\sin x$$

Question 1.c

$$\cos^2(\pi - x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x \text{ et } \sin^2(\pi + x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

$$C(x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

$$C(x) = 1$$

Question 2

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \text{ donc } \cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Donc } E = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1.$$

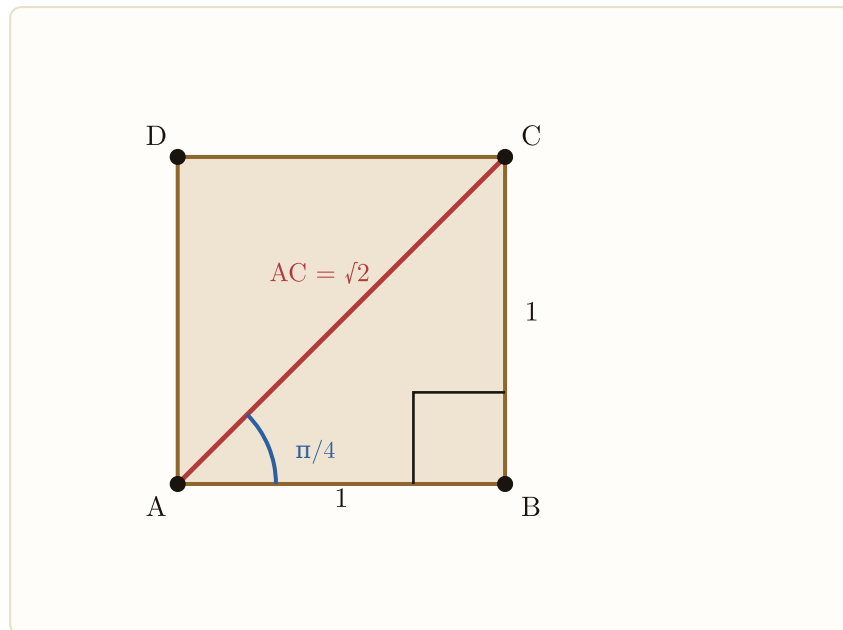
$$E = 1$$

Exercice 5 (★★★) : démontrer les valeurs remarquables (démonstration au programme)

1. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Calculer AC . Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$? En déduire $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.
2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2 et H le milieu de $[BC]$. Justifier que ABH est rectangle en H , calculer AH et donner les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$. En déduire $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.
3. Retrouver $\cos \frac{\pi}{4}$ en utilisant seulement le cercle trigonométrique et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Correction de l'exercice 5

Question 1



Un carré ABCD de côté 1 et sa diagonale $[AC]$

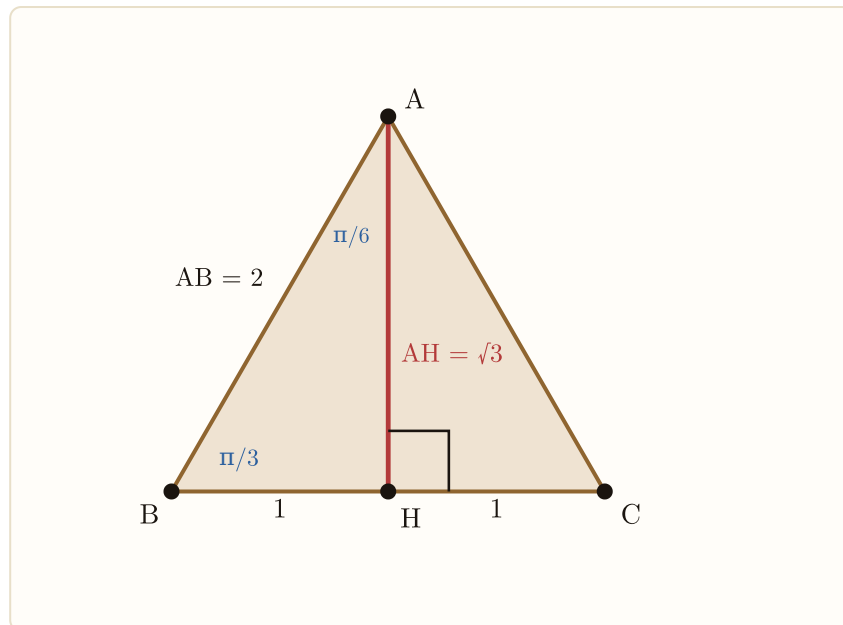
Le triangle ABC est rectangle en B , donc $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 1 = 2$ et $AC = \sqrt{2}$.

Il est aussi isocèle en B : les angles en A et en C sont égaux et leur somme est $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

Pour cet angle : côté adjacent $AB = 1$, côté opposé $BC = 1$, hypoténuse $AC = \sqrt{2}$.

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Question 2



Un triangle équilatéral ABC de côté 2 et sa hauteur [AH]

Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux à $\frac{\pi}{3}$. Dans un triangle isocèle ($AB = AC$), la médiane issue de A est aussi hauteur et bissectrice : $(AH) \perp (BC)$, donc ABH est rectangle en H , et $\widehat{BAH} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Aussi $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{3}$.

$BH = \frac{BC}{2} = 1$ et $AB = 2$. Pythagore : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 4 - 1 = 3$, donc $AH = \sqrt{3}$.

Pour l'angle $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{3}$: adjacent $BH = 1$, opposé $AH = \sqrt{3}$, hypoténuse $AB = 2$.

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour l'angle $\widehat{BAH} = \frac{\pi}{6}$: adjacent $AH = \sqrt{3}$, opposé $BH = 1$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Question 3

$M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$, c'est-à-dire sur la droite $y = x$: $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = c$.

Alors $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donne $2c^2 = 1$, soit $c^2 = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{\pi}{4} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $c > 0$: $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

.

On retrouve $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6 (★★) : le lien avec le triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A avec $AB = 3$ et $AC = 4$. On note $\beta = \widehat{ABC}$ (en radians).

1. Calculer BC , puis $\cos \beta$ et $\sin \beta$.
2. Montrer que le point de coordonnées $(\cos \beta ; \sin \beta)$ est bien sur le cercle trigonométrique. Donner une valeur approchée de β en radians (calculatrice en mode radian) et en degrés.
3. On note $\gamma = \widehat{ACB}$. Exprimer γ en fonction de β , puis comparer $\cos \gamma$ et $\sin \beta$.
4. Un triangle rectangle a une hypoténuse de 10 cm et un angle aigu de $\frac{\pi}{6}$ rad. Calculer les longueurs des deux autres côtés.

Correction de l'exercice 6

Question 1

Pythagore : $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $BC = 5$.

Côté adjacent à β : $AB = 3$; côté opposé : $AC = 4$; hypoténuse : $BC = 5$.

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \text{ et } \sin \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}.$$

Question 2

$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$: le point $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ est à la distance 1 de O , donc sur le cercle trigonométrique (c'est $M(\beta)$, dans le premier quadrant).

À la calculatrice, la touche $\cos^{-1}$ appliquée à 0,6 (mode radian) donne $\beta \approx 0,927$ rad, soit $\beta \approx 53,1^\circ$.

$$\beta \approx 0,927 \text{ rad} \approx 53,1^\circ.$$

Question 3

La somme des angles d'un triangle vaut π : $\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Pour l'angle γ , le côté adjacent est $AC = 4$: $\cos \gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = \sin \beta$.

On retrouve $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta$ (et de même $\sin \gamma = \frac{3}{5} = \cos \beta$).

Question 4

Notons $h = 10$ la longueur de l'hypoténuse. Le côté adjacent à l'angle $\frac{\pi}{6}$ vaut $h \cos \frac{\pi}{6} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ et le côté opposé vaut $h \sin \frac{\pi}{6} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.

Contrôle : $(5\sqrt{3})^2 + 5^2 = 75 + 25 = 100 = 10^2$.

Les côtés mesurent $5\sqrt{3} \approx 8,66$ cm et 5 cm.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
2. $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$.
3. $\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
4. Il existe un réel x tel que $\cos x = 0,6$ et $\sin x = 0,7$.
5. Pour tout réel x , $\sin(\pi + x) = \sin x$.
6. $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

C'est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : l'abscisse change de signe.

Vrai.

Affirmation 2

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ (ou : } \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \text{)}.$$

Vrai.

Affirmation 3

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}.$$

Faux.

Affirmation 4

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 0,36 + 0,49 = 0,85 \neq 1.$$

Faux.

Affirmation 5

$$\sin(\pi + x) = -\sin x. \text{ Contre-exemple : } x = \frac{\pi}{2} \text{ donne } \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \neq 1.$$

Faux.

Affirmation 6

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \text{ les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc ont la même abscisse.}$$

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Connaître** le tableau des valeurs remarquables (exercice 1).
- **Calculer** avec les angles associés en nommant la symétrie (exercices 2 et 4).
- **Retrouver** un sinus ou un cosinus avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et le signe (exercice 3).
- **Démontrer** cos et sin de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$ (exercice 5).
- **Utiliser** cosinus et sinus dans un triangle rectangle (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. $\cos \frac{2\pi}{3}$ vaut :

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{2}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Justification : $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

2. $\sin \frac{5\pi}{4}$ vaut :

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $-\frac{1}{2}$

Justification : $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$, alors $\cos x$ vaut :

- A. $\frac{4}{5}$
- B. $-\frac{4}{5}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{16}{25}$

D. $-\frac{16}{25}$

Justification : $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, et $\cos x \leq 0$ dans le deuxième quadrant.

4. Pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à :

A. $\cos x$

B. $-\cos x$

C. $\sin x$ (bonne réponse)

D. $-\sin x$

Justification : La symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange abscisse et ordonnée.

5. Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α , $\cos \alpha$ est égal à :

A. $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

B. $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (bonne réponse)

C. $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

D. $\frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}}$

Justification : C'est le lien avec l'abscisse de $M(\alpha)$: $\cos \alpha = \frac{OH}{OM}$.