

## Fiche 2 : cercle trigonométrique et placement de points

Six exercices pour maîtriser le **cercle trigonométrique** et l'enroulement :

- placer des points sur le cercle ;
- lire un réel dont l'image est un point donné ;
- reconnaître les réels qui ont la même image ;
- polygones réguliers inscrits dans le cercle ;
- axes et quadrants ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le réel est **ramené à un tour** par un calcul écrit ;
- le **point est situé** (quadrant, angle) ;
- les conclusions sont des phrases.

### Le modèle de rédaction pour placer un point

«  $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ , donc  $M\left(\frac{7\pi}{3}\right) = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$  : on fait un tour complet puis on avance de  $\frac{\pi}{3}$  (soit  $60^\circ$ ) dans le sens direct. »

- **Écris**  $x$  comme  $x_0 + 2k\pi$  avec  $x_0 \in [0; 2\pi[$  (ou  $]-\pi; \pi]$ ).
- **Conclus** :  $M(x) = M(x_0)$ .
- **Situe**  $M(x_0)$  avec les angles remarquables.

### Les pièges classiques

- Se tromper de sens pour un réel **négatif** (sens indirect = sens des aiguilles d'une montre).
- Oublier que **deux réels différents** peuvent avoir la même image.
- Se tromper dans le calcul de  $x - 2k\pi$  avec des dénominateurs différents.
- Confondre  $M(x)$  (un point) et  $x$  (un réel).

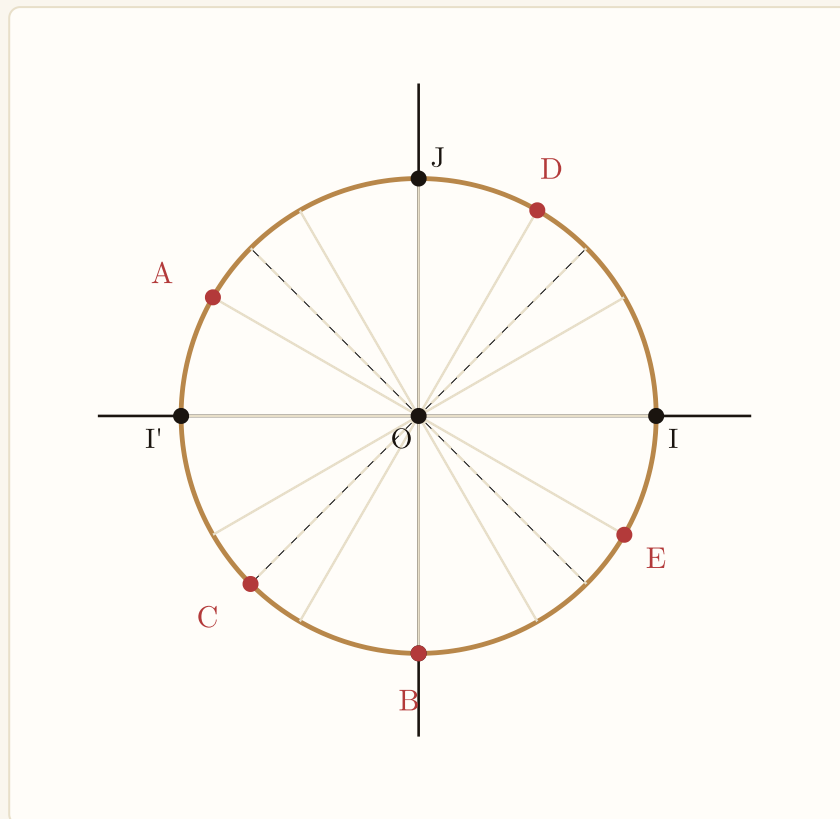
Ranger  $-\frac{11\pi}{4}$  dans le premier quadrant parce que « il y a un 11 », ce n'est pas une méthode.

**Exercice 1 (★) : placer des points**

Placer sur le cercle trigonométrique les points  $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ ,  $M\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$  et  $M\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ . Que remarques-tu ?

**Exercice 2 (★) : lire un réel sur la figure**

Sur la figure ci-dessous, les rayons sont tracés tous les  $\frac{\pi}{6}$  (traits pleins) et tous les  $\frac{\pi}{4}$  (pointillés) à partir de  $I$ .



Les points A, B, C, D, E sur le cercle trigonométrique (rayons tracés tous les  $\frac{\pi}{6}$  et tous les  $\frac{\pi}{4}$  à partir de I)

1. Pour chacun des points A, B, C, D, E, donner un réel de  $[0; 2\pi[$  dont il est l'image.
2. Pour A et C, donner aussi un réel **négatif** dont ils sont l'image.
3. Donner tous les réels de  $[20; 30]$  dont D est l'image.

**Exercice 3 (★★) : réels de même image**

1. Regrouper, parmi les réels  $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}$ , ceux qui ont la même image.
2. Les réels  $\frac{8\pi}{3}$  et  $-\frac{4\pi}{3}$  ont-ils la même image ?
3. Les réels 1 et 7 ont-ils la même image ?
4. Écrire en Python une fonction `reduire(x)` qui renvoie le réel de  $[0; 2\pi[$  ayant la même image que  $x$ . La tester avec  $-\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{25\pi}{6}$ .

**Exercice 4 (★★) : polygones réguliers**

1. Pour  $k = 0, 1, \dots, 5$ , on note  $M_k = M\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ . Montrer que  $M_0M_1\dots M_5$  est un hexagone régulier de côté 1.
2. Combien de points distincts y a-t-il parmi les  $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ? Quelle est la nature du polygone qu'ils forment ?
3. Même question pour les points  $M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , puis pour  $M\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Donner des réels dont les images sont les sommets d'un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, dont  $I$  est un sommet.

**Exercice 5 (★★) : axes et quadrants**

1. Donner les coordonnées de  $M(5\pi)$ ,  $M\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$ ,  $M(100\pi)$ ,  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  et  $M\left(\frac{41\pi}{2}\right)$ .
2. Sans calculatrice, en utilisant  $\pi \approx 3,14$ , dire dans quel quadrant se trouve  $M(x)$  pour  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $x = -1$  et  $x = 5$ . En déduire les signes de  $\cos x$  et  $\sin x$ .
3. Même question pour  $x = 100$ . Vérifier avec la calculatrice (mode **radian**).

**Exercice 6 (★★) : vrai ou faux****Justifier chaque réponse :**

1.  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .
2. Si  $M(x) = M(y)$ , alors  $x = y$ .
3. Les points  $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $M\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  sont symétriques par rapport à la droite  $(OI)$ .
4. Le point  $M(10)$  est dans le troisième quadrant.
5. Il y a un seul réel  $x$  de  $[0; 4\pi[$  tel que  $M(x) = J$ .
6. Les points  $M(x)$  et  $M(x + \pi)$  sont diamétralement opposés.

**Ce qui peut tomber en contrôle**

- **Placer** un point  $M(x)$  après réduction à un tour (exercices 1 et 5).
- **Lire** un réel sur une figure (exercice 2).
- **Montrer** que deux réels ont la même image (exercice 3).
- **Reconnaître** un polygone régulier (exercice 4).
- **Situer** un point dans un quadrant (exercice 5).

**QCM : une seule bonne réponse par question**

1. Le point  $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$  est égal à :
  - A.  $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$
  - B.  $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
  - C.  $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
  - D.  $M\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
2. Lequel de ces réels n'a **pas** la même image que  $\frac{\pi}{6}$  ?
  - A.  $\frac{13\pi}{6}$
  - B.  $-\frac{11\pi}{6}$
  - C.  $\frac{25\pi}{6}$
  - D.  $\frac{7\pi}{6}$

3. Le point  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  est :
- A.  $I$
  - B.  $J$
  - C.  $I'$
  - D.  $J'$
4. Combien de points distincts y a-t-il parmi les  $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ?
- A. 2
  - B. 4
  - C. 8
  - D. une infinité
5. Avec  $\pi \approx 3,14$ , le point  $M(2)$  est dans le :
- A. premier quadrant
  - B. deuxième quadrant
  - C. troisième quadrant
  - D. quatrième quadrant