

Fiche 2 : cercle trigonométrique et placement de points

Six exercices pour maîtriser le **cercle trigonométrique** et l'enroulement :

- placer des points sur le cercle ;
- lire un réel dont l'image est un point donné ;
- reconnaître les réels qui ont la même image ;
- polygones réguliers inscrits dans le cercle ;
- axes et quadrants ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le réel est **ramené à un tour** par un calcul écrit ;
- le **point est situé** (quadrant, angle) ;
- les conclusions sont des phrases.

Le modèle de rédaction pour placer un point

« $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$, donc $M\left(\frac{7\pi}{3}\right) = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$: on fait un tour complet puis on avance de $\frac{\pi}{3}$ (soit 60°) dans le sens direct. »

- **Écris** x comme $x_0 + 2k\pi$ avec $x_0 \in [0; 2\pi[$ (ou $]-\pi; \pi]$).
- **Conclus** : $M(x) = M(x_0)$.
- **Situe** $M(x_0)$ avec les angles remarquables.

Les pièges classiques

- Se tromper de sens pour un réel **négatif** (sens indirect = sens des aiguilles d'une montre).
- Oublier que **deux réels différents** peuvent avoir la même image.
- Se tromper dans le calcul de $x - 2k\pi$ avec des dénominateurs différents.
- Confondre $M(x)$ (un point) et x (un réel).

Ranger $-\frac{11\pi}{4}$ dans le premier quadrant parce que « il y a un 11 », ce n'est pas une méthode.

Exercice 1 (★) : placer des points

Placer sur le cercle trigonométrique les points $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, $M\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ et $M\left(\frac{13\pi}{6}\right)$. Que remarques-tu ?

Correction de l'exercice 1**Méthode**

Pour chaque réel, on se ramène à un tour.

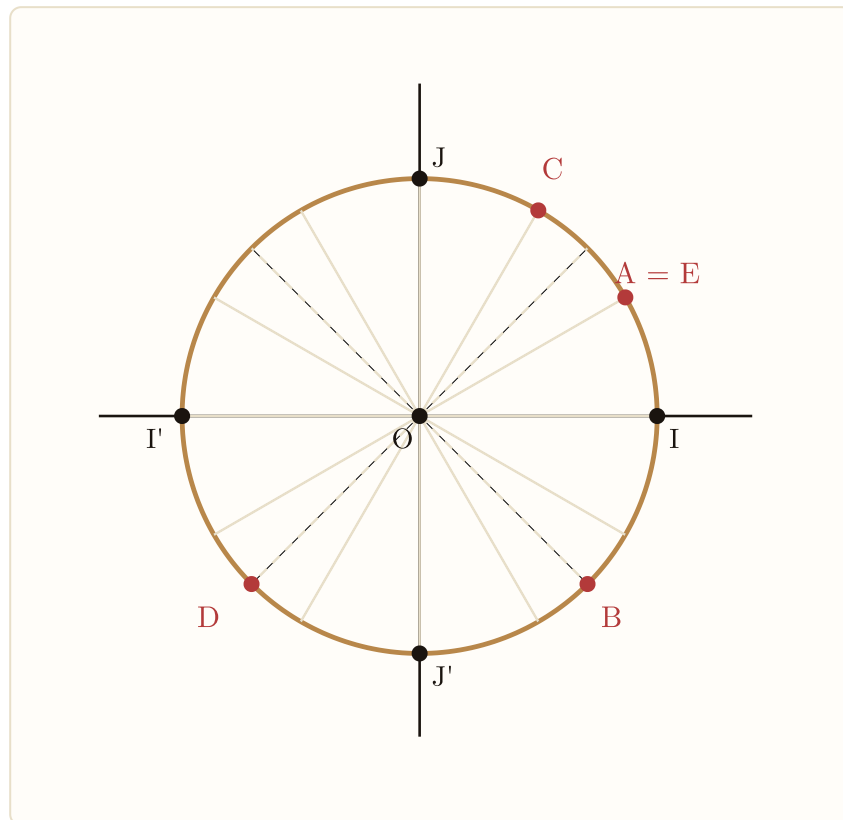
$\frac{\pi}{6}$ est déjà dans $[0; 2\pi[$: le point $A = M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est à 30° de I , dans le premier quadrant.

$-\frac{\pi}{4}$: on part de I dans le sens indirect de $\frac{\pi}{4}$ (45°). Le point B est dans le quatrième quadrant ; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$, donc $B = M\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

$\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$: $C = M\left(\frac{7\pi}{3}\right) = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, à 60° de I .

$-\frac{11\pi}{4} + 4\pi = -\frac{11\pi}{4} + \frac{16\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$: $D = M\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = M\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, à 225° de I (troisième quadrant).

$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$: $E = M\left(\frac{13\pi}{6}\right) = M\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

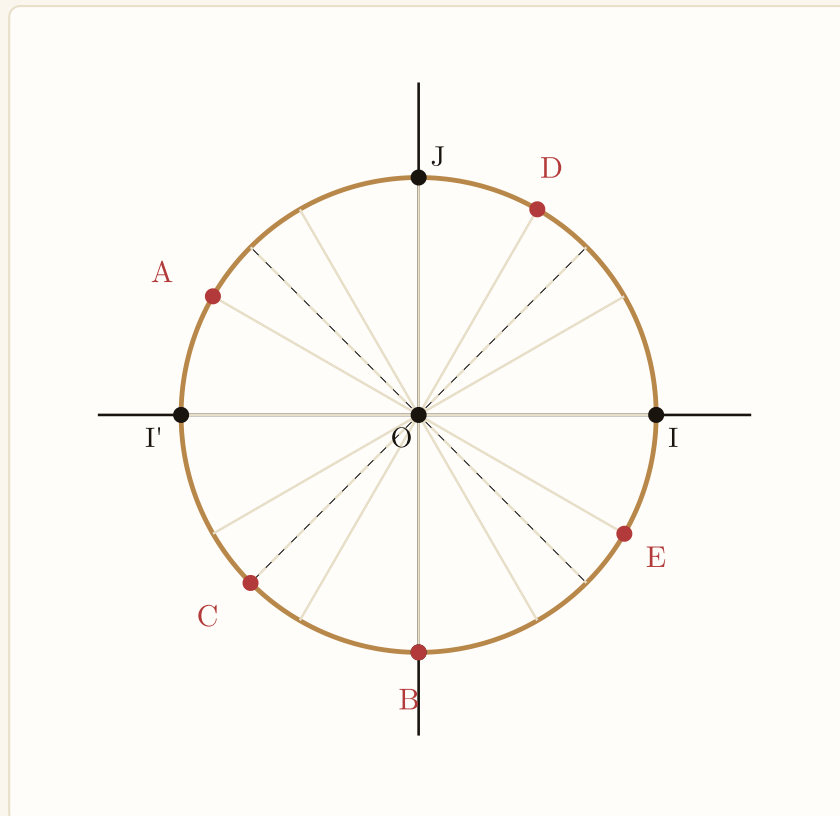


Correction : les points $M(\pi/6) = A = E$, B, C, D

Les points $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $M\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ sont confondus, car $\frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi$.

Exercice 2 (★) : lire un réel sur la figure

Sur la figure ci-dessous, les rayons sont tracés tous les $\frac{\pi}{6}$ (traits pleins) et tous les $\frac{\pi}{4}$ (pointillés) à partir de I .



Les points A, B, C, D, E sur le cercle trigonométrique (rayons tracés tous les $\frac{\pi}{6}$ et tous les $\frac{\pi}{4}$ à partir de I)

1. Pour chacun des points A, B, C, D, E, donner un réel de $[0; 2\pi[$ dont il est l'image.
2. Pour A et C, donner aussi un réel **négatif** dont ils sont l'image.
3. Donner tous les réels de $[20; 30]$ dont D est l'image.

Correction de l'exercice 2

Question 1

On compte les rayons depuis I dans le sens direct.

A : cinq rayons de $\frac{\pi}{6}$, donc $\frac{5\pi}{6}$. B est le point J' : $\frac{3\pi}{2}$. C : cinq rayons de $\frac{\pi}{4}$, donc $\frac{5\pi}{4}$. D : deux rayons de $\frac{\pi}{6}$, donc $\frac{\pi}{3}$. E : onze rayons de $\frac{\pi}{6}$, donc $\frac{11\pi}{6}$.

$$A : \frac{5\pi}{6} ; B : \frac{3\pi}{2} ; C : \frac{5\pi}{4} ; D : \frac{\pi}{3} ; E : \frac{11\pi}{6}.$$

Question 2

$$\text{On retranche } 2\pi : \frac{5\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$A = M\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \text{ et } C = M\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Question 3

Les réels dont l'image est D sont $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$k = 3 : \frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{19\pi}{3} \approx 19,90 < 20. \quad k = 4 : \frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{25\pi}{3} \approx 26,18 \in [20; 30]. \quad k = 5 : \frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{31\pi}{3} \approx 32,46 > 30.$$

Un seul réel convient : $\frac{25\pi}{3}$.

Exercice 3 (★★) : réels de même image

1. Regrouper, parmi les réels $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}$, ceux qui ont la même image.
2. Les réels $\frac{8\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}$ ont-ils la même image ?
3. Les réels 1 et 7 ont-ils la même image ?
4. Écrire en Python une fonction `reduire(x)` qui renvoie le réel de $[0; 2\pi[$ ayant la même image que x . La tester avec $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

On ramène chaque réel dans $[0; 2\pi[$:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} ; \frac{11\pi}{3} - 2\pi = \frac{5\pi}{3} ; \frac{17\pi}{3} - 4\pi = \frac{17\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} ; -\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}.$$

Premier groupe (image $M\left(\frac{5\pi}{3}\right)$) : $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}$. Second groupe (image $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$) : $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

Question 2

$$\frac{8\pi}{3} - \left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{12\pi}{3} = 4\pi = 2 \times 2\pi : \text{la différence est un multiple entier de } 2\pi.$$

Oui, $M\left(\frac{8\pi}{3}\right) = M\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Question 3

$7 - 1 = 6$ et $0 < 6 < 2\pi \approx 6,28$: 6 n'est pas un multiple entier de 2π .

Non, $M(1) \neq M(7)$ (ils sont très proches, mais différents).

Question 4

On ajoute ou on retranche 2π tant que le réel n'est pas dans $[0; 2\pi[$:

```
from math import pi

def reduire(x):
    while x < 0:
        x = x + 2 * pi
    while x >= 2 * pi:
        x = x - 2 * pi
    return x

print(reduire(-pi / 3))      # environ 5.236, soit 5pi/3
print(reduire(25 * pi / 6)) # environ 0.524, soit pi/6
```

Le test donne bien $\frac{5\pi}{3} \approx 5,236$ et $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$. Les valeurs sont des **approximations** (nombres décimaux). Python propose aussi l'opérateur $x \% (2 * \text{pi})$, qui fait la même chose.

La fonction `reduire` renvoie un réel de $[0; 2\pi[$ qui a la même image que x .

Exercice 4 (★★) : polygones réguliers

1. Pour $k = 0, 1, \dots, 5$, on note $M_k = M\left(\frac{k\pi}{3}\right)$. Montrer que $M_0M_1\dots M_5$ est un hexagone régulier de côté 1.
2. Combien de points distincts y a-t-il parmi les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$? Quelle est la nature du polygone qu'ils forment ?
3. Même question pour les points $M\left(\frac{k\pi}{6}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, puis pour $M\left(\frac{k\pi}{5}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Donner des réels dont les images sont les sommets d'un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, dont I est un sommet.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Deux points consécutifs M_k et M_{k+1} sont séparés par un arc de longueur $\frac{\pi}{3} : \widehat{M_k O M_{k+1}} = \frac{\pi}{3}$ (et c'est aussi le cas pour M_5 et M_0 , car $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$).

Le triangle $OM_k M_{k+1}$ est isocèle en O ($OM_k = OM_{k+1} = 1$) avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$: ses deux angles à la base valent $\frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$. Il est équilatéral, donc $M_k M_{k+1} = 1$.

Les six côtés mesurent 1 et les six sommets sont sur le cercle : $M_0 M_1 \dots M_5$ est un hexagone régulier de côté 1.

Question 2

$M \left(\frac{(k+4)\pi}{2} \right) = M \left(\frac{k\pi}{2} + 2\pi \right) = M \left(\frac{k\pi}{2} \right)$: les points se répètent tous les 4 valeurs de k .

Ce sont $M(0) = I$, $M \left(\frac{\pi}{2} \right) = J$, $M(\pi) = I'$, $M \left(\frac{3\pi}{2} \right) = J'$.

Ils sont séparés par des arcs de longueur $\frac{\pi}{2}$: $IJJ'I'$ est un carré (ses diagonales $[II']$ et $[JJ']$ sont perpendiculaires, de même longueur 2 et se coupent en leur milieu O). Son côté vaut $IJ = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Il y a 4 points distincts, qui forment un carré de côté $\sqrt{2}$.

Question 3

$M \left(\frac{(k+12)\pi}{6} \right) = M \left(\frac{k\pi}{6} + 2\pi \right) = M \left(\frac{k\pi}{6} \right)$, et deux valeurs k et k' avec $0 \leq k < k' \leq 11$ donnent des points différents car $\frac{(k'-k)\pi}{6} < 2\pi$ n'est pas un multiple de 2π .

De même pour $\frac{k\pi}{5} : \frac{(k+10)\pi}{5} = \frac{k\pi}{5} + 2\pi$.

Il y a 12 points distincts pour les $M \left(\frac{k\pi}{6} \right)$ (un dodécagone régulier) et 10 pour les $M \left(\frac{k\pi}{5} \right)$ (un décagone régulier).

Question 4

Huit sommets régulièrement répartis : l'arc entre deux sommets consécutifs vaut $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Les réels $\frac{k\pi}{4}$ pour $k = 0, 1, \dots, 7$ conviennent : $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

Exercice 5 (★★) : axes et quadrants

- Donner les coordonnées de $M(5\pi)$, $M\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$, $M(100\pi)$, $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M\left(\frac{41\pi}{2}\right)$.
- Sans calculatrice, en utilisant $\pi \approx 3,14$, dire dans quel quadrant se trouve $M(x)$ pour $x = 2$, $x = 4$, $x = -1$ et $x = 5$. En déduire les signes de $\cos x$ et $\sin x$.
- Même question pour $x = 100$. Vérifier avec la calculatrice (mode **radian**).

Correction de l'exercice 5

Question 1

On se ramène à un tour :

$$M(5\pi) = M(\pi) \text{ car } 5\pi - 4\pi = \pi. \quad M\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ car } -\frac{7\pi}{2} + 4\pi = \frac{\pi}{2}. \quad M(100\pi) = M(0) \text{ car } 100\pi = 50 \times 2\pi. \\ M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ car } -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}. \quad M\left(\frac{41\pi}{2}\right) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ car } \frac{41\pi}{2} - 20\pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$M(5\pi) = I'(-1; 0); \quad M\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = J(0; 1); \quad M(100\pi) = I(1; 0); \quad M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = J'(0; -1); \\ M\left(\frac{41\pi}{2}\right) = J(0; 1).$$

Question 2

On encadre chaque réel entre des multiples de $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, $\pi \approx 3,14$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$, $2\pi \approx 6,28$).

x	Encadrement	Quadrant	$\cos x$	$\sin x$
2	$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$	deuxième	< 0	> 0
4	$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$	troisième	< 0	< 0
-1	$-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$	quatrième	> 0	< 0
5	$\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$	quatrième	> 0	< 0

Question 3

$\frac{100}{2\pi} \approx 15,9$: on peut retrancher 15 tours, soit $30\pi \approx 94,25$. Reste $100 - 30\pi \approx 5,75$.

Or $\frac{3\pi}{2} \approx 4,71 < 5,75 < 2\pi \approx 6,28$: quatrième quadrant, donc $\cos 100 > 0$ et $\sin 100 < 0$.

À la calculatrice : $\cos 100 \approx 0,862$ et $\sin 100 \approx -0,506$, ce qui confirme les signes.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. $M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.
2. Si $M(x) = M(y)$, alors $x = y$.
3. Les points $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $M\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ sont symétriques par rapport à la droite (OI) .
4. Le point $M(10)$ est dans le troisième quadrant.
5. Il y a un seul réel x de $[0; 4\pi[$ tel que $M(x) = J$.
6. Les points $M(x)$ et $M(x + \pi)$ sont diamétralement opposés.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

$$\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : $M(0) = M(2\pi) = I$ avec $0 \neq 2\pi$.**Faux.**

Affirmation 3

On parcourt la même longueur $\frac{\pi}{3}$ depuis I , dans deux sens opposés : les deux points sont symétriques par rapport à (OI) .

Vrai.

Affirmation 4

$$10 - 2\pi \approx 3,72 \text{ et } \pi \approx 3,14 < 3,72 < \frac{3\pi}{2} \approx 4,71.$$

Vrai.

Affirmation 5

$$J = M\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \text{ appartient aussi à } [0; 4\pi[: \text{il y en a deux, } \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{5\pi}{2}.$$

Faux.

Affirmation 6

Ajouter π revient à faire un demi-tour de plus : $M(x + \pi)$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à O , donc ils sont aux extrémités d'un diamètre.

Vrai.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Placer** un point $M(x)$ après réduction à un tour (exercices 1 et 5).
- **Lire** un réel sur une figure (exercice 2).
- **Montrer** que deux réels ont la même image (exercice 3).
- **Reconnaître** un polygone régulier (exercice 4).
- **Situer** un point dans un quadrant (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Le point $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ est égal à :

- A. $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (bonne réponse)
- B. $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- C. $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
- D. $M\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Justification : $\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

2. Lequel de ces réels n'a **pas** la même image que $\frac{\pi}{6}$?

- A. $\frac{13\pi}{6}$
- B. $-\frac{11\pi}{6}$
- C. $\frac{25\pi}{6}$
- D. $\frac{7\pi}{6}$ (bonne réponse)

Justification : $\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi$ n'est pas un multiple de 2π . Les autres diffèrent de $\frac{\pi}{6}$ de 2π , -2π et 4π .

3. Le point $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est :

- A. I
- B. J
- C. I'
- D. J' (bonne réponse)

Justification : On parcourt un quart de tour dans le sens indirect depuis I : on arrive en $J'(0; -1)$.

4. Combien de points distincts y a-t-il parmi les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$?

- A. 2
- B. 4 (**bonne réponse**)
- C. 8
- D. une infinité

Justification : Les points se répètent tous les 4 valeurs de k : I, J, I', J' .

5. Avec $\pi \approx 3,14$, le point $M(2)$ est dans le :

- A. premier quadrant
- B. **deuxième quadrant (bonne réponse)**
- C. troisième quadrant
- D. quatrième quadrant

Justification : $\frac{\pi}{2} \approx 1,57 < 2 < \pi \approx 3,14$.