

Fiche 1 : radians et longueur d'arc

Six exercices pour maîtriser **les radians et la longueur d'arc** :

- conversions entre degrés et radians ;
- longueur d'arc, angle au centre, rayon ;
- une roue de vélo ;
- l'aiguille d'une horloge ;
- l'enroulement de la droite sur le cercle ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule** utilisée est écrite ;
- le calcul est fait **ligne par ligne**, valeur exacte puis valeur approchée ;
- le résultat est une **phrase avec son unité**.

Le modèle de rédaction pour une longueur d'arc

« Sur un cercle de rayon $R = 5$ cm, un angle de $\frac{2\pi}{3}$ rad intercepte un arc de longueur $\ell = R\alpha = 5 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \approx 10,5$ cm. »

- **Écris** la formule $\ell = R\alpha$ en précisant que α est en radians.
- **Remplace** et calcule : valeur exacte d'abord.
- **Conclus** avec l'unité.

Les pièges classiques

- Utiliser $\ell = R\alpha$ avec un angle en **degrés**.
- Oublier l'unité (cm, m) dans la conclusion.
- Écrire « $\pi = 180$ » au lieu de « $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ ».
- Calculer avec la calculatrice en mode degrés.

Une longueur d'arc négative ou plus grande que le tour du cercle ? Relis ton énoncé, le cercle n'est pas élastique.

Exercice 1 (★) : conversions

1. Convertir en radians (valeur exacte) : 30° ; 135° ; 210° ; 72° .
2. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{4}$.
3. Donner une valeur approchée de 1 rad en degrés (au dixième) et de 50° en radians (au centième).

Exercice 2 (★★) : longueur d'arc, angle, rayon

Dans chaque cas, utiliser $\ell = R\alpha$ (α en radians) :

1. $R = 5$ cm et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad : calculer la longueur ℓ de l'arc.
2. $R = 6$ cm et un arc de longueur 4 cm : calculer l'angle α (en radians, puis en degrés au dixième).
3. Un arc de longueur 3π cm est intercepté par un angle de $\frac{\pi}{5}$ rad : calculer le rayon R .
4. $R = 8$ cm et $\alpha = 45^\circ$: calculer la longueur de l'arc.

Exercice 3 (★★) : la roue de vélo

Une roue de vélo a un diamètre de 66 cm : son rayon est $R = 0,33$ m. On s'intéresse à un point P du pneu.

1. Quelle distance P parcourt-il sur le cercle quand la roue tourne de $\frac{5\pi}{6}$ rad ?
2. Quelle est la longueur d'un tour de roue ?
3. Le vélo roule sans glisser : à chaque tour de roue, il avance de la longueur d'un tour. Combien de tours de roue pour parcourir 1 km ?
4. De quel angle la roue a-t-elle tourné quand P a parcouru 1 m sur le cercle ? Est-ce plus ou moins d'un demi-tour ?

Exercice 4 (★★) : l'horloge

L'aiguille des minutes d'une horloge mesure 12 cm et celle des heures 8 cm. On suit l'extrémité de chaque aiguille.

1. En 20 minutes, quelle distance parcourt l'extrémité de l'aiguille des minutes ?
2. De 14 h à 17 h 30, quelle distance parcourt l'extrémité de l'aiguille des heures ?
3. À 16 h pile, quel est l'angle (en radians) entre l'aiguille des heures et la direction de 12 h ?
4. Combien de temps faut-il à l'extrémité de l'aiguille des minutes pour parcourir 6π cm ?

Exercice 5 (★★) : enroulement de la droite

Dans chaque cas, on part de I sur le cercle trigonométrique et on parcourt la longueur indiquée.

1. Longueur $\frac{5\pi}{2}$ dans le sens direct : combien de tours complets ? En quel point arrive-t-on ?
2. Longueur 3π dans le sens indirect (c'est-à-dire le réel -3π) : combien de tours complets ? En quel point arrive-t-on ?
3. Longueur 10 dans le sens direct : combien de tours complets ? Dans quel quadrant arrive-t-on ? (On prendra $\pi \approx 3,14$.)
4. Donner tous les réels de $[0; 20]$ dont l'image est J' .

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Sur le cercle trigonométrique, un angle de 2 rad intercepte un arc de longueur 2.
2. Un angle de 1 rad mesure 1° .
3. Si on double le rayon d'un cercle sans changer l'angle au centre, la longueur de l'arc est doublée.
4. Sur un cercle de rayon 2, un arc de longueur π correspond à un angle de π rad.
5. Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.
6. Un tour complet vaut 360 rad.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Convertir** degrés et radians (exercice 1).
- **Appliquer** $\ell = R\alpha$ dans les deux sens (exercices 2, 3 et 4).
- **Se ramener à des tours** avec l'enroulement (exercice 5).
- **Justifier** une affirmation par un calcul (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

- En degrés, $\frac{3\pi}{4}$ rad vaut :
 - 105°
 - 135°
 - 150°
 - 270°
- Sur un cercle de rayon 4, l'arc intercepté par un angle de $\frac{\pi}{3}$ rad a pour longueur :
 - $\frac{4\pi}{3}$
 - $\frac{\pi}{12}$
 - 12π
 - $\frac{2\pi}{3}$
- Un angle de 1 rad intercepte, sur un cercle de rayon 7 cm, un arc de longueur :
 - 1 cm
 - $\frac{\pi}{7}$ cm
 - 7 cm
 - 7π cm
- En partant de I , on parcourt $\frac{5\pi}{2}$ dans le sens direct sur le cercle trigonométrique. On arrive en :
 - I
 - J
 - I'
 - J'
- Un arc de 6 cm sur un cercle de rayon 4 cm correspond à un angle de :
 - 24 rad
 - 1,5 rad
 - $\frac{2}{3}$ rad

D. 10 rad