

Fiche 1 : radians et longueur d'arc

Six exercices pour maîtriser **les radians et la longueur d'arc** :

- conversions entre degrés et radians ;
- longueur d'arc, angle au centre, rayon ;
- une roue de vélo ;
- l'aiguille d'une horloge ;
- l'enroulement de la droite sur le cercle ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule** utilisée est écrite ;
- le calcul est fait **ligne par ligne**, valeur exacte puis valeur approchée ;
- le résultat est une **phrase avec son unité**.

Le modèle de rédaction pour une longueur d'arc

« Sur un cercle de rayon $R = 5$ cm, un angle de $\frac{2\pi}{3}$ rad intercepte un arc de longueur $\ell = R\alpha = 5 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \approx 10,5$ cm. »

- **Écris** la formule $\ell = R\alpha$ en précisant que α est en radians.
- **Remplace** et calcule : valeur exacte d'abord.
- **Conclus** avec l'unité.

Les pièges classiques

- Utiliser $\ell = R\alpha$ avec un angle en **degrés**.
- Oublier l'unité (cm, m) dans la conclusion.
- Écrire « $\pi = 180$ » au lieu de « $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ ».
- Calculer avec la calculatrice en mode degrés.

Une longueur d'arc négative ou plus grande que le tour du cercle ? Relis ton énoncé, le cercle n'est pas élastique.

Exercice 1 (★) : conversions

1. Convertir en radians (valeur exacte) : 30° ; 135° ; 210° ; 72° .
2. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{4}$.
3. Donner une valeur approchée de 1 rad en degrés (au dixième) et de 50° en radians (au centième).

Correction de l'exercice 1

Question 1

On multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

$$30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}.$$

$$135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ (car } 135 = 3 \times 45\text{)}.$$

$$210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ (car } 210 = 7 \times 30\text{)}.$$

$$72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ (car } 72 = 2 \times 36 \text{ et } 180 = 5 \times 36\text{)}.$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} ; 135^\circ = \frac{3\pi}{4} ; 210^\circ = \frac{7\pi}{6} ; 72^\circ = \frac{2\pi}{5}.$$

Question 2

On multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

$$\frac{\pi}{12} \rightarrow \frac{180}{12} = 15.$$

$$\frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{5 \times 180}{3} = 300.$$

$$\frac{2\pi}{5} \rightarrow \frac{2 \times 180}{5} = 72.$$

$$\frac{7\pi}{4} \rightarrow \frac{7 \times 180}{4} = 315.$$

$$\frac{\pi}{12} = 15^\circ ; \frac{5\pi}{3} = 300^\circ ; \frac{2\pi}{5} = 72^\circ ; \frac{7\pi}{4} = 315^\circ.$$

Question 3

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés} \approx 57,3^\circ.$$

$$50^\circ = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \approx 0,87 \text{ rad}.$$

$$1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ \text{ et } 50^\circ \approx 0,87 \text{ rad}.$$

Exercice 2 (★★) : longueur d'arc, angle, rayon

Dans chaque cas, utiliser $\ell = R\alpha$ (α en radians) :

1. $R = 5$ cm et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad : calculer la longueur ℓ de l'arc.
2. $R = 6$ cm et un arc de longueur 4 cm : calculer l'angle α (en radians, puis en degrés au dixième).
3. Un arc de longueur 3π cm est intercepté par un angle de $\frac{\pi}{5}$ rad : calculer le rayon R .
4. $R = 8$ cm et $\alpha = 45^\circ$: calculer la longueur de l'arc.

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$\ell = R\alpha = 5 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \approx 10,47.$$

L'arc mesure $\frac{10\pi}{3}$ cm, soit environ 10,5 cm.

Question 2

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ rad} \approx 0,67 \text{ rad}.$$

$$\text{En degrés : } \frac{2}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{120}{\pi} \approx 38,2^\circ.$$

L'angle vaut $\frac{2}{3}$ rad, soit environ $38,2^\circ$.

Question 3

$$R = \frac{\ell}{\alpha} = \frac{3\pi}{\pi/5} = 3\pi \times \frac{5}{\pi} = 15.$$

Le rayon vaut 15 cm.

Question 4

L'angle est en degrés : on convertit d'abord. $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad.

$$\ell = R\alpha = 8 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi \approx 6,28.$$

L'arc mesure 2π cm, soit environ 6,28 cm.

Exercice 3 (★★) : la roue de vélo

Une roue de vélo a un diamètre de 66 cm : son rayon est $R = 0,33$ m. On s'intéresse à un point P du pneu.

1. Quelle distance P parcourt-il sur le cercle quand la roue tourne de $\frac{5\pi}{6}$ rad ?
2. Quelle est la longueur d'un tour de roue ?
3. Le vélo roule sans glisser : à chaque tour de roue, il avance de la longueur d'un tour. Combien de tours de roue pour parcourir 1 km ?
4. De quel angle la roue a-t-elle tourné quand P a parcouru 1 m sur le cercle ? Est-ce plus ou moins d'un demi-tour ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$\ell = R\alpha = 0,33 \times \frac{5\pi}{6} = 0,275\pi \approx 0,864.$$

P parcourt environ 0,86 m.

Question 2

Un tour correspond à $\alpha = 2\pi$: $\ell = 0,33 \times 2\pi = 0,66\pi \approx 2,07$.

Un tour de roue mesure environ 2,07 m.

Question 3

1 km = 1000 m. Nombre de tours : $\frac{1000}{0,66\pi} \approx 482,3$.

Il faut environ 482 tours de roue.

Question 4

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{1}{0,33} = \frac{100}{33} \approx 3,03 \text{ rad.}$$

Un demi-tour correspond à $\pi \approx 3,14$ rad, et $3,03 < 3,14$.

La roue a tourné d'environ 3,03 rad, soit un peu moins d'un demi-tour.

Exercice 4 (★★) : l'horloge

L'aiguille des minutes d'une horloge mesure 12 cm et celle des heures 8 cm. On suit l'extrémité de chaque aiguille.

1. En 20 minutes, quelle distance parcourt l'extrémité de l'aiguille des minutes ?
2. De 14 h à 17 h 30, quelle distance parcourt l'extrémité de l'aiguille des heures ?
3. À 16 h pile, quel est l'angle (en radians) entre l'aiguille des heures et la direction de 12 h ?
4. Combien de temps faut-il à l'extrémité de l'aiguille des minutes pour parcourir 6π cm ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

20 min sur 60 min : $\frac{1}{3}$ de tour, soit $\alpha = \frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$ rad.

$$\ell = 12 \times \frac{2\pi}{3} = 8\pi \approx 25,1.$$

L'extrémité parcourt 8π cm, environ 25,1 cm.

Question 2

De 14 h à 17 h 30 : 3,5 h sur 12 h pour un tour, soit $\frac{3,5}{12} = \frac{7}{24}$ de tour, donc $\alpha = \frac{7}{24} \times 2\pi = \frac{7\pi}{12}$ rad.

$$\ell = 8 \times \frac{7\pi}{12} = \frac{14\pi}{3} \approx 14,7.$$

L'extrémité parcourt $\frac{14\pi}{3}$ cm, environ 14,7 cm.

Question 3

À 16 h, l'aiguille des heures a avancé de 4 h sur 12 h : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de tour.

L'angle vaut $\frac{2\pi}{3}$ rad (soit 120°).

Question 4

$\ell = R\alpha$ donne $\alpha = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ rad, soit un quart de tour.

Un tour dure 60 min, un quart de tour dure 15 min.

Il faut 15 minutes.

Exercice 5 (★★) : enroulement de la droite

Dans chaque cas, on part de I sur le cercle trigonométrique et on parcourt la longueur indiquée.

1. Longueur $\frac{5\pi}{2}$ dans le sens direct : combien de tours complets ? En quel point arrive-t-on ?
2. Longueur 3π dans le sens indirect (c'est-à-dire le réel -3π) : combien de tours complets ? En quel point arrive-t-on ?
3. Longueur 10 dans le sens direct : combien de tours complets ? Dans quel quadrant arrive-t-on ? (On prendra $\pi \approx 3,14$.)
4. Donner tous les réels de $[0 ; 20]$ dont l'image est J' .

Correction de l'exercice 5

Question 1

$\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$: un tour complet, puis un quart de tour dans le sens direct.

On fait 1 tour complet et on arrive en J .

Question 2

$-3\pi = -2\pi - \pi$: un tour complet dans le sens indirect, puis un demi-tour dans le sens indirect.

On fait 1 tour complet et on arrive en I' .

Question 3

Un tour mesure $2\pi \approx 6,28$ et $10 - 6,28 = 3,72$: un seul tour complet, puis un arc de longueur 3,72.

Or $\pi \approx 3,14 < 3,72 < \frac{3\pi}{2} \approx 4,71$: le point est entre I' et J' .

On fait 1 tour complet et on arrive dans le troisième quadrant.

Question 4

$J' = M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, donc les réels dont l'image est J' sont $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

$k = 0 : \frac{3\pi}{2} \approx 4,71$; $k = 1 : \frac{7\pi}{2} \approx 10,99$; $k = 2 : \frac{11\pi}{2} \approx 17,28$; $k = 3 : \frac{15\pi}{2} \approx 23,56 > 20$.

$\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{2}$.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Sur le cercle trigonométrique, un angle de 2 rad intercepte un arc de longueur 2.
2. Un angle de 1 rad mesure 1° .
3. Si on double le rayon d'un cercle sans changer l'angle au centre, la longueur de l'arc est doublée.
4. Sur un cercle de rayon 2, un arc de longueur π correspond à un angle de π rad.
5. Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.
6. Un tour complet vaut 360 rad.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Avec $R = 1 : \ell = R\alpha = 1 \times 2 = 2$.**Vrai.**

Affirmation 2

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57,3^\circ.$$

Faux.

Affirmation 3

 $\ell = R\alpha$: si R double et α est fixe, ℓ double.**Vrai.**

Affirmation 4

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\pi}{2} \text{ rad, pas } \pi.$$

Faux.

Affirmation 5

$$\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi : \text{les deux réels diffèrent d'un tour.}$$

Vrai.

Affirmation 6

Un tour complet vaut 2π rad, soit 360° .**Faux.**

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Convertir** degrés et radians (exercice 1).
- **Appliquer** $\ell = R\alpha$ dans les deux sens (exercices 2, 3 et 4).
- **Se ramener à des tours** avec l'enroulement (exercice 5).
- **Justifier** une affirmation par un calcul (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. En degrés, $\frac{3\pi}{4}$ rad vaut :

- A. 105°
- B. 135° (bonne réponse)
- C. 150°
- D. 270°

Justification : $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 135$.

2. Sur un cercle de rayon 4, l'arc intercepté par un angle de $\frac{\pi}{3}$ rad a pour longueur :

- A. $\frac{4\pi}{3}$ (bonne réponse)
- B. $\frac{\pi}{12}$
- C. 12π
- D. $\frac{2\pi}{3}$

Justification : $\ell = R\alpha = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

3. Un angle de 1 rad intercepte, sur un cercle de rayon 7 cm, un arc de longueur :

- A. 1 cm
- B. $\frac{\pi}{7}$ cm
- C. 7 cm (bonne réponse)
- D. 7π cm

Justification : Par définition du radian, l'arc a pour longueur $R = 7$ cm.

4. En partant de I , on parcourt $\frac{5\pi}{2}$ dans le sens direct sur le cercle trigonométrique. On arrive en :

- A. I
- B. J (bonne réponse)
- C. I'
- D. J'

Justification : $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$: un tour, puis un quart de tour, donc en J .

5. Un arc de 6 cm sur un cercle de rayon 4 cm correspond à un angle de :

A. 24 rad

B. 1,5 rad (bonne réponse)

C. $\frac{2}{3}$ rad

D. 10 rad

Justification : $\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{6}{4} = 1,5$.