

Contrôle : chapitre 6, Trigonométrie

Durée : 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Radians et cercle trigonométrique

1. Convertir 105° en radians (valeur exacte) puis $\frac{5\pi}{9}$ radians en degrés. (1 point)
2. Déterminer la mesure principale (dans $] -\pi ; \pi]$) du réel $\frac{47\pi}{6}$. (1 point)
3. Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{6}$, $\sin \frac{11\pi}{4}$ et $\cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, en précisant les propriétés utilisées. (1,5 points)
4. Soit x un réel de l'intervalle $] -\pi ; 0[$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, en justifiant le signe, puis en déduire $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$. (1,5 points)
5. Un secteur circulaire a pour rayon 8 cm et pour angle au centre 135° . Calculer, en valeur exacte puis arrondie au dixième, la longueur de son arc et le périmètre du secteur (arc et deux rayons). (1,5 points)

Exercice 2 (7,5 points) : Valeurs remarquables et octogone

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$ et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. Pour tout réel x , on note $M(x)$ le point de $\mathcal{C}$ associé à x ; ses coordonnées sont $(\cos x ; \sin x)$.

1. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (1,5 points)
2. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 points)
3. Déterminer les coordonnées exactes des points $M\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, en expliquant les propriétés de symétrie ou d'enroulement utilisées. (2 points)
4. Pour tout entier k de 0 à 7, on note $A_k = M\left(\frac{k\pi}{4}\right)$; les huit points $A_0, \dots, A_7$ forment un octogone régulier inscrit dans $\mathcal{C}$ (on admet que ses huit côtés ont la même longueur). Calculer la longueur A_0A_1 , puis le périmètre de l'octogone, et le comparer à la longueur de $\mathcal{C}$. (2 points)

Exercice 3 (6 points) : Une roue panoramique

Une roue panoramique a pour rayon 10 m et son centre O est situé à 12 m au-dessus du sol. Une cabine est repérée par l'angle α (en radians) que fait le rayon $[OC]$ qui la porte avec l'horizontale orientée vers la droite, l'angle étant mesuré dans le sens trigonométrique. La hauteur de la cabine au-dessus du sol est donc $h = 12 + 10 \sin \alpha$ (en mètres) : le rayon vaut 10 m et $\sin \alpha$ est l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé à α .

La roue effectue un tour complet en 15 minutes, à vitesse constante. À l'instant $t = 0$, la cabine étudiée est à l'horizontale du centre ($\alpha = 0$) et la roue tourne dans le sens trigonométrique.

Pour la question 4, on utilise le script Python incomplet suivant.

```
from math import sin, pi

def hauteur(alpha):
    return ..... + 10 * sin(alpha)

hauteurs = [round(hauteur(...), 1) for k in range(12)]
print(hauteurs)
```

1. Calculer, en valeur exacte puis arrondie au dixième de mètre, la hauteur de la cabine lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$. (1,5 points)
2. Quel angle la cabine a-t-elle décrit au bout de 5 minutes ? Calculer la distance parcourue par la cabine pendant ces 5 minutes (valeur exacte puis arrondie au dixième de mètre) et sa hauteur à cet instant. (1,5 points)
3. Deux cabines sont diamétralement opposées : leurs angles sont α et $\alpha + \pi$. Montrer que la somme de leurs hauteurs vaut 24 m , puis justifier que la hauteur d'une cabine est toujours comprise entre 2 m et 22 m . (1 point)
4. La roue porte 12 cabines régulièrement espacées ; la cabine numéro k (k entier de 0 à 11) est repérée par l'angle $\frac{2k\pi}{12}$. Le script Python de l'énoncé doit afficher la liste des hauteurs, arrondies au dixième, des 12 cabines. Compléter les deux zones en pointillés. Puis déterminer, par un calcul exact, la hauteur des cabines numéros 4 et 7 et vérifier qu'elles figurent dans la liste affichée. (2 points)