

Contrôle : chapitre 6, Trigonométrie

Durée : 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6,5 points) : Radians et cercle trigonométrique

1. Convertir 105° en radians (valeur exacte) puis $\frac{5\pi}{9}$ radians en degrés. (1 point)
2. Déterminer la mesure principale (dans $] -\pi ; \pi]$) du réel $\frac{47\pi}{6}$. (1 point)
3. Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{6}$, $\sin \frac{11\pi}{4}$ et $\cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, en précisant les propriétés utilisées. (1,5 points)
4. Soit x un réel de l'intervalle $] -\pi ; 0[$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, en justifiant le signe, puis en déduire $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$. (1,5 points)
5. Un secteur circulaire a pour rayon 8 cm et pour angle au centre 135° . Calculer, en valeur exacte puis arrondie au dixième, la longueur de son arc et le périmètre du secteur (arc et deux rayons). (1,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

On passe des degrés aux radians en multipliant par $\frac{\pi}{180}$: $105 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{12}$ (car $105 = 15 \times 7$ et $180 = 15 \times 12$).

On passe des radians aux degrés en multipliant par $\frac{180}{\pi}$: $\frac{5\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 5 \times 20 = 100$.

$$105^\circ = \frac{7\pi}{12} \text{ rad et } \frac{5\pi}{9} \text{ rad} = 100^\circ.$$

Barème : 0,5 point pour la conversion en radians ; 0,5 point pour la conversion en degrés.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{47\pi}{6} - 2k\pi \in] -\pi ; \pi]$. Comme $8\pi = \frac{48\pi}{6}$, on prend $k = 4$:

$$\frac{47\pi}{6} - 8\pi = \frac{47\pi - 48\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \text{ et } -\pi < -\frac{\pi}{6} \leq \pi.$$

La mesure principale de $\frac{47\pi}{6}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

Barème : 0,5 point pour la valeur de k ou la réduction modulo 2π ; 0,5 point pour la mesure principale vérifiée dans l'intervalle.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ car } \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi \right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car les réels } \frac{11\pi}{4} \text{ et } \frac{3\pi}{4} \text{ ont le même point image et } \sin(\pi - x) = \sin x.$$

$$\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 2\pi \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ car } -\frac{5\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{3} \text{ ont le même point image.}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \sin \frac{11\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Barème : 0,5 point pour $\cos \frac{7\pi}{6}$ avec la propriété citée ; 0,5 point pour $\sin \frac{11\pi}{4}$ avec les propriétés citées ; 0,5 point pour $\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right)$ avec les propriétés citées.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, d'où $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Comme $x \in]-\pi ; 0[$, le point $M(x)$ est sous l'axe des abscisses : $\sin x < 0$. Donc $\sin x = -\frac{4}{5}$.

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5} \text{ et } \sin(\pi + x) = -\sin x = \frac{4}{5}.$$

$$\sin x = -\frac{4}{5} ; \cos(\pi - x) = -\frac{3}{5} ; \sin(\pi + x) = \frac{4}{5}.$$

Barème : 0,5 point pour $\sin^2 x = \frac{16}{25}$; 0,5 point pour le choix du signe justifié ; 0,5 point pour les deux valeurs déduites.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1,5 points)

L'angle vaut $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Longueur de l'arc : $\ell = R\alpha = 8 \times \frac{3\pi}{4} = 6\pi \approx 18,8$ cm.

Périmètre du secteur : $\ell + 2R = 6\pi + 16 \approx 34,8$ cm.

L'arc mesure $6\pi \approx 18,8$ cm et le secteur a pour périmètre $6\pi + 16 \approx 34,8$ cm.

Barème : 0,5 point pour la conversion de l'angle en radians ; 0,5 point pour la longueur d'arc ; 0,5 point pour le périmètre.

Exercice 2 (7,5 points) : Valeurs remarquables et octogone

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ et on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. Pour tout réel x , on note $M(x)$ le point de $\mathcal{C}$ associé à x ; ses coordonnées sont $(\cos x; \sin x)$.

1. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (1,5 points)

2. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2 points)

3. Déterminer les coordonnées exactes des points $M\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$, en expliquant les propriétés de symétrie ou d'enroulement utilisées. (2 points)

4. Pour tout entier k de 0 à 7, on note $A_k = M\left(\frac{k\pi}{4}\right)$; les huit points $A_0, \dots, A_7$ forment un octogone régulier inscrit dans $\mathcal{C}$ (on admet que ses huit côtés ont la même longueur). Calculer la longueur A_0A_1 , puis le périmètre de l'octogone, et le comparer à la longueur de $\mathcal{C}$. (2 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1,5 points)

Le point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ voit l'angle $\widehat{IOM}$ mesurer $\frac{\pi}{4}$ radians, soit 45° : il est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$, donc à égale distance des axes. Ses coordonnées sont égales : $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = a$, avec $a > 0$ car M est dans le premier quadrant.

Comme M est sur le cercle trigonométrique, $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$, soit $2a^2 = 1$, donc $a^2 = \frac{1}{2}$.

Comme $a > 0$: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Barème : 0,5 point pour l'égalité des coordonnées justifiée (bissectrice) et $a > 0$; 0,5 point pour $2a^2 = 1$; 0,5 point pour la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

Soit $M = M\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Le triangle OIM est isocèle en O ($OI = OM = 1$) et son angle au sommet $\widehat{IOM}$ mesure $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$: il est donc **équilatéral**.

Soit K le projeté orthogonal de M sur (OI) . Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue de M est aussi médiane : K est le milieu de $[OI]$, donc $\cos \frac{\pi}{3} = OK = \frac{1}{2}$.

$$\text{Alors } \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Comme M est au-dessus de l'axe des abscisses, $\sin \frac{\pi}{3} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Barème : 0,5 point pour le triangle OIM équilatéral justifié ; 0,5 point pour $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (milieu de $[OI]$) ; 0,5 point pour $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$; 0,5 point pour le signe et la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: $M\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est le symétrique de $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ par rapport à l'axe des ordonnées, donc de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$-\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \pi$: $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ est le symétrique de $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ par rapport à O , donc de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$: $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sont confondus, donc de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$M\left(\frac{5\pi}{6}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right); M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); M\left(\frac{7\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Barème : 0,5 point pour $M\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; 0,5 point pour $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 0,5 point pour $M\left(\frac{7\pi}{3}\right)$; 0,5 point pour les justifications par symétries ou 2π .

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (2 points)

$$A_0 = I(1; 0) \text{ et } A_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$A_0 A_1^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}, \text{ donc } A_0 A_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,77.$$

Le périmètre de l'octogone vaut $8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6,12$, alors que la longueur de $\mathcal{C}$ est $2\pi \times 1 \approx 6,28$.

Le périmètre de l'octogone ($\approx 6,12$) est légèrement inférieur à la longueur du cercle ($\approx 6,28$) : il en donne une approximation par défaut (idée de la méthode d'Archimède).

Barème : 0,5 point pour les coordonnées de A_0 et A_1 ; 0,5 point pour $A_0 A_1^2 = 2 - \sqrt{2}$ et $A_0 A_1$; 0,5 point pour le périmètre exact et approché ; 0,5 point pour la longueur 2π et la comparaison.

Exercice 3 (6 points) : Une roue panoramique

Une roue panoramique a pour rayon 10 m et son centre O est situé à 12 m au-dessus du sol. Une cabine est repérée par l'angle α (en radians) que fait le rayon $[OC]$ qui la porte avec l'horizontale orientée vers la droite, l'angle étant mesuré dans le sens trigonométrique. La hauteur de la cabine au-dessus du sol est donc $h = 12 + 10 \sin \alpha$ (en mètres) : le rayon vaut 10 m et $\sin \alpha$ est l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé à α .

La roue effectue un tour complet en 15 minutes, à vitesse constante. À l'instant $t = 0$, la cabine étudiée est à l'horizontale du centre ($\alpha = 0$) et la roue tourne dans le sens trigonométrique.

Pour la question 4, on utilise le script Python incomplet suivant.

```
from math import sin, pi

def hauteur(alpha):
    return ..... + 10 * sin(alpha)

hauteurs = [round(hauteur(...), 1) for k in range(12)]
print(hauteurs)
```

1. Calculer, en valeur exacte puis arrondie au dixième de mètre, la hauteur de la cabine lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$. (1,5 points)
2. Quel angle la cabine a-t-elle décrit au bout de 5 minutes ? Calculer la distance parcourue par la cabine pendant ces 5 minutes (valeur exacte puis arrondie au dixième de mètre) et sa hauteur à cet instant. (1,5 points)
3. Deux cabines sont diamétralement opposées : leurs angles sont α et $\alpha + \pi$. Montrer que la somme de leurs hauteurs vaut 24 m, puis justifier que la hauteur d'une cabine est toujours comprise entre 2 m et 22 m. (1 point)
4. La roue porte 12 cabines régulièrement espacées ; la cabine numéro k (k entier de 0 à 11) est repérée par l'angle $\frac{2k\pi}{12}$. Le script Python de l'énoncé doit afficher la liste des hauteurs, arrondies au dixième, des 12 cabines. Compléter les deux zones en pointillés. Puis déterminer, par un calcul exact, la hauteur des cabines numéros 4 et 7 et vérifier qu'elles figurent dans la liste affichée. (2 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

$$\alpha = \frac{\pi}{6} : h = 12 + 10 \times \frac{1}{2} = 17 \text{ m.}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} : \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } h = 12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7 \text{ m.}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} : \sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } h = 12 - 5\sqrt{2} \approx 4,9 \text{ m.}$$

Hauteurs : 17 m ; $12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7$ m ; $12 - 5\sqrt{2} \approx 4,9$ m.

Barème : 0,5 point pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 0,5 point pour $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ avec la propriété utilisée ; 0,5 point pour $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ avec la propriété utilisée.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

Un tour (2π radians) dure 15 minutes, donc en 5 minutes la cabine décrit un tiers de tour : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad.

La distance parcourue est la longueur de l'arc de cercle de rayon 10 m : $\ell = 10 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \approx 20,9$ m.

La hauteur est celle de la question précédente pour $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Au bout de 5 minutes : angle $\frac{2\pi}{3}$, distance $\frac{20\pi}{3} \approx 20,9$ m, hauteur $12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7$ m.

Barème : 0,5 point pour l'angle $\frac{2\pi}{3}$; 0,5 point pour la longueur d'arc ; 0,5 point pour la hauteur.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1 point)

Les points $M(\alpha)$ et $M(\alpha + \pi)$ sont symétriques par rapport à O : $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.

$$h_1 + h_2 = (12 + 10 \sin \alpha) + (12 - 10 \sin \alpha) = 24.$$

Comme $\sin \alpha$ est l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique, $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ donc $2 \leq 12 + 10 \sin \alpha \leq 22$.

Barème : 0,5 point pour la somme égale à 24 justifiée ; 0,5 point pour l'encadrement $2 \leq h \leq 22$ justifié.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2 points)

Le script complété est :

```

from math import sin, pi

def hauteur(alpha):
    return 12 + 10 * sin(alpha)

hauteurs = [round(hauteur(2 * k * pi / 12), 1) for k in range(12)]
print(hauteurs)

```

Il affiche : [12.0, 17.0, 20.7, 22.0, 20.7, 17.0, 12.0, 7.0, 3.3, 2.0, 3.3, 7.0].

Cabine 4 : $\alpha = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$ et $h = 12 + 10 \sin \frac{2\pi}{3} = 12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7$ m (cinquième valeur de la liste).

Cabine 7 : $\alpha = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ et $h = 12 + 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ m (huitième valeur de la liste).

Barème : 0,5 point pour la hauteur du centre : 12 ; 0,5 point pour l'argument $2 * k * \pi / 12$; 0,5 point pour la cabine 4 : $12 + 5\sqrt{3} \approx 20,7$; 0,5 point pour la cabine 7 : 7 m.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6,5
Exercice 2	7,5
Exercice 3	6
Total	20