

Fonction exponentielle : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction $(x + 2)e^{-x}$: variations, équation, tangente, Python ;
- un problème de **concentration d'un médicament** : maximum, durée d'efficacité ;
- une **fonction quotient avec l'exponentielle** : parité, dérivée, tangente, encadrement.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- $e^x > 0$ écrit chaque fois qu'il justifie un signe ;
- **tableau de variations** avec images et comparaison aux bornes ;
- **conclusion en contexte** avec l'unité.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une étude avec exponentielle : **dérive, factorise par l'exponentielle, justifie le signe, dresse le tableau.**
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : la fonction $(x + 2)e^{-x}$

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Résoudre $f(x) = 0$ puis donner le signe de $f(x)$ sur $[-3; 4]$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ a au plus une solution dans $[-1; 4]$. On admet qu'elle en a une, notée β . Avec Python, donner un encadrement de β à 10^{-2} près.

Exercice 2 : la concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée, t heures après l'injection, par $C(t) = 5te^{-0,5t}$ pour $t \in [0; 10]$.

1. Montrer que $C'(t) = 5(1 - 0,5t)e^{-0,5t}$ et dresser le tableau de variations de C .
2. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur (arrondie au centième) ?
3. Le médicament est efficace lorsque la concentration est supérieure ou égale à 3 mg/L. Justifier avec le tableau que l'équation $C(t) = 3$ a au plus une solution dans $[0; 2]$ et au plus une dans $[2; 10]$. On admet qu'elle en a une dans chacun de ces intervalles, notées t_1 et t_2 . Déterminer avec un script des valeurs approchées de t_1 et t_2 au centième d'heure, puis la durée d'efficacité.
4. Donner la concentration à $t = 10$ et interpréter.

Exercice 3 : une fonction quotient avec l'exponentielle

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $g(x) + g(-x) = 1$. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
2. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et en déduire le sens de variation de g .
3. Montrer que, pour tout réel x , $0 < g(x) < 1$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
5. Montrer que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x , puis que $g(x) \geq \frac{x + 1}{e^x + 1}$.