

Fonction exponentielle : exercices de synthèse

Trois exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction $(x + 2)e^{-x}$: variations, équation, tangente, Python ;
- un problème de **concentration d'un médicament** : maximum, durée d'efficacité ;
- une **fonction quotient avec l'exponentielle** : parité, dérivée, tangente, encadrement.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- $e^x > 0$ écrit chaque fois qu'il justifie un signe ;
- **tableau de variations** avec images et comparaison aux bornes ;
- **conclusion en contexte** avec l'unité.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une étude avec exponentielle : **dérive, factorise par l'exponentielle, justifie le signe, dresse le tableau.**
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : la fonction $(x + 2)e^{-x}$

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Résoudre $f(x) = 0$ puis donner le signe de $f(x)$ sur $[-3; 4]$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ a au plus une solution dans $[-1; 4]$. On admet qu'elle en a une, notée β . Avec Python, donner un encadrement de β à 10^{-2} près.

Correction de la question 1

f est dérivable sur $[-3; 4]$ comme produit de fonctions dérivables.

Avec $u = x + 2$ et $v = e^{-x}$: $u' = 1$ et $v' = -e^{-x}$.

$$f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 2).$$

$$f'(x) = -(x+1)e^{-x}$$

Pour tout x , $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $-(x+1)$, donc de $-x-1$.

$f'(x) > 0$ pour $x < -1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > -1$.

On calcule $f(-3) = -e^3 \approx -20,09$, $f(-1) = e^1 = e \approx 2,72$ et $f(4) = 6e^{-4} \approx 0,11$.

x	-3		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-e^3$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$6e^{-4}$

f est strictement croissante sur $[-3; -1]$ et strictement décroissante sur $[-1; 4]$.

Correction de la question 2

Pour tout x , $e^{-x} \neq 0$: $f(x) = 0 \iff x+2=0 \iff x=-2$.

Comme $e^{-x} > 0$, $f(x)$ a le signe de $x+2$.

$f(x) = 0$ pour $x = -2$; $f(x) < 0$ sur $[-3; -2[$; $f(x) > 0$ sur $] -2; 4]$.

Correction de la question 3

Équation de la tangente en $a = 0$: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$f(0) = 2e^0 = 2$ et $f'(0) = -(0+1)e^0 = -1$.

$y = -1 \times x + 2$.

$T : y = -x + 2$.

Correction de la question 4

D'après le tableau, f est **strictement décroissante** sur $[-1; 4]$, de $e \approx 2,72$ à $6e^{-4} \approx 0,11$: deux réels distincts de cet intervalle ne peuvent pas avoir la même image.

L'équation $f(x) = 1$ a **au plus une** solution dans $[-1; 4]$. Comme $1 \in [0,11; 2,72]$, on admet qu'elle en a une : β .

Pour la trouver, on balaie $[-1; 4]$ avec un pas de 0,01 :

```

from math import exp

def f(x):
    return (x + 2) * exp(-x)

x = -1
while f(x) > 1:      # f est décroissante sur [-1 ; 4]
    x = x + 0.01
print(round(x - 0.01, 2), round(x, 2))  # affiche 1.14 1.15

```

On obtient $f(1,14) > 1 > f(1,15)$ (en effet $\beta \approx 1,1462$).

$1,14 < \beta < 1,15$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : dérivée de produit correcte, $e^{-x} > 0$ écrit, tableau avec trois images.
- **Q2** : produit nul ($e^{-x} \neq 0$), signe justifié.
- **Q3** : formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ appliquée avec les deux valeurs calculées.
- **Q4** : raisonnement par **monotonie** (au plus une solution), encadrement avec le sens de l'inégalité correct.

Exercice 2 : la concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée, t heures après l'injection, par $C(t) = 5t e^{-0,5t}$ pour $t \in [0; 10]$.

1. Montrer que $C'(t) = 5(1 - 0,5t) e^{-0,5t}$ et dresser le tableau de variations de C .
2. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur (arrondie au centième) ?
3. Le médicament est efficace lorsque la concentration est supérieure ou égale à 3 mg/L. Justifier avec le tableau que l'équation $C(t) = 3$ a au plus une solution dans $[0; 2]$ et au plus une dans $[2; 10]$. On admet qu'elle en a une dans chacun de ces intervalles, notées t_1 et t_2 . Déterminer avec un script des valeurs approchées de t_1 et t_2 au centième d'heure, puis la durée d'efficacité.
4. Donner la concentration à $t = 10$ et interpréter.

Correction de la question 1

C est dérivable sur $[0; 10]$ comme produit de fonctions dérivables.

Avec $u = 5t$ et $v = e^{-0,5t}$: $u' = 5$ et $v' = -0,5e^{-0,5t}$.

$$C'(t) = 5e^{-0,5t} + 5t \times (-0,5)e^{-0,5t} = e^{-0,5t} (5 - 2,5t).$$

$$C'(t) = 5(1 - 0,5t) e^{-0,5t}$$

Pour tout t , $e^{-0,5t} > 0$: $C'(t)$ a le signe de $1 - 0,5t$.

$$1 - 0,5t > 0 \iff t < 2.$$

On calcule $C(0) = 0$, $C(2) = 10e^{-1} \approx 3,68$ et $C(10) = 50e^{-5} \approx 0,34$.

x	0		2		10
$C'(t)$		+	0	−	
C	0	↗	$10e^{-1}$	↘	$50e^{-5}$

C est strictement croissante sur $[0 ; 2]$ et strictement décroissante sur $[2 ; 10]$.

Correction de la question 2

Le maximum de C est atteint en $t = 2$ (la fonction croît jusque-là puis décroît).

La concentration est maximale 2 heures après l'injection : $C(2) = 10e^{-1} \approx 3,68$ mg/L.

Correction de la question 3

Sur $[0 ; 2]$, C est strictement croissante : elle prend chaque valeur **au plus une fois**. Sur $[2 ; 10]$, elle est strictement décroissante : même conclusion. D'où au plus une solution t_1 dans $[0 ; 2]$ et au plus une solution t_2 dans $[2 ; 10]$ (elles existent, car $3 \in [0 ; 3,68]$ et $3 \in [0,34 ; 3,68]$).

Un balayage avec un pas de 0,01 heure donne les deux instants :

```

from math import exp

def C(t):
    return 5 * t * exp(-0.5 * t)

t = 0
while C(t) < 3:
    t = t + 0.01
t1 = t
while C(t) >= 3:
    t = t + 0.01
t2 = t
print(round(t1, 2), round(t2, 2))    # affiche 0.98 3.57

```

On trouve $t_1 \approx 0,98$ h et $t_2 \approx 3,57$ h (à 0,01 h près). D'après le tableau, la concentration est ≥ 3 mg/L sur $[t_1; t_2]$.

Durée d'efficacité : $t_2 - t_1 \approx 2,59$ heures, soit environ 2 h 35 min.

Correction de la question 4

$$C(10) = 50e^{-5} \approx 0,34 \text{ mg/L.}$$

Dix heures après l'injection, il ne reste qu'environ 0,34 mg/L : le médicament est presque totalement éliminé.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : dérivée de produit avec le coefficient $-0,5$, $e^{-0,5t} > 0$ **écrit**, tableau avec trois images.
- **Q2** : maximum lu dans le tableau, **valeur** et **instant** distingués, unité.
- **Q3** : monotonie sur deux intervalles, valeurs aux bornes, **conclusion en contexte** avec la durée.
- **Q4** : interprétation en une phrase.

Exercice 3 : une fonction quotient avec l'exponentielle

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $g(x) + g(-x) = 1$. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
2. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et en déduire le sens de variation de g .
3. Montrer que, pour tout réel x , $0 < g(x) < 1$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
5. Montrer que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x , puis que $g(x) \geq \frac{x + 1}{e^x + 1}$.

Correction de la question 1

Pour tout réel x : $g(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$. On multiplie en haut et en bas par e^x :

$$g(-x) = \frac{e^x e^{-x}}{e^x (e^{-x} + 1)} = \frac{1}{1 + e^x}.$$

$$\text{Donc } g(x) + g(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1.$$

Pour tout réel x : $g(x) + g(-x) = 1$.

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x : $h(-x) = g(-x) - \frac{1}{2} = 1 - g(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - g(x) = -h(x)$.

h est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Correction de la question 2

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur $e^x + 1 > 0$ ne s'annule pas.

Avec $u = e^x$ et $v = e^x + 1$: $u' = v' = e^x$.

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Pour tout x , $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$: $g'(x) > 0$.

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de la question 3

Pour tout x , $e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$, donc $g(x) > 0$.

De plus $e^x + 1 > e^x$ et $e^x + 1 > 0$: $\frac{e^x}{e^x + 1} < 1$.

Pour tout réel x : $0 < g(x) < 1$.

Correction de la question 4

Équation en $a = 0$: $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$.

$$g(0) = \frac{1}{2} \text{ et } g'(0) = \frac{e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$T : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Correction de la question 5

Posons $h(x) = e^x - x - 1$. Alors $h'(x) = e^x - 1$, négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$ (car $e^0 = 1$ et $\exp$ est croissante).

h admet donc un minimum $h(0) = 0$: $h(x) \geq 0$, soit $e^x \geq x + 1$.

Comme $e^x + 1 > 0$, on divise : $\frac{e^x}{e^x + 1} \geq \frac{x + 1}{e^x + 1}$.

Pour tout réel x : $g(x) \geq \frac{x + 1}{e^x + 1}$.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : multiplication par e^x pour supprimer e^{-x} , puis définition de la **parité** ($h(-x) = -h(x)$).
- **Q2** : dérivée de quotient, **dénominateur non nul** justifié, signe d'un carré.
- **Q3** : deux inégalités justifiées.
- **Q4** : formule de la tangente appliquée.
- **Q5** : étude de $h(x) = e^x - x - 1$ complète, puis division par une quantité **strictement positive**.