

Fonction exponentielle**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (3 - x)e^{-x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f (sans les limites en $\pm\infty$).
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Justifier que, pour tout réel x , $f(x) \leq e^{-3}$. L'équation $f(x) = e^{-3}$ admet-elle des solutions ? Si oui, lesquelles ?

Exercice S2 : Une fonction de type logistique

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
2. Calculer $g(x) + g(-x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de g ? (On pourra considérer le point $I(0; \frac{1}{2})$.)
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g .
4. Montrer que $0 < g(x) < 1$ pour tout réel x .
5. Vérifier que, pour tout réel x , $g'(x) = g(x)(1 - g(x))$.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

Exercice S3 : Équations et inéquation du second degré en e^x

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en posant $X = e^x$:

1. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$;
2. $e^{2x} - (e + e^2)e^x + e^3 = 0$;
3. $e^{2x} - (e + e^2)e^x + e^3 \leq 0$.

Exercice S4 : Exposants non affines et signes

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{x^2} = e^{x+2}$;
2. $e^{x^2} \leq e^{3x-2}$;
3. $(x^2 - 1)e^{-x} > 0$;
4. $e^{2x} - e^x = 0$.

Exercice S5 : Deux fonctions construites avec l'exponentielle

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions c et s par

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x , $c(x)^2 - s(x)^2 = 1$.
2. Montrer que $c' = s$ et $s' = c$.
3. Montrer que $s(x) > 0 \iff x > 0$ (on utilisera la stricte croissance de l'exponentielle).
4. En déduire le tableau de variations de c et montrer que $c(x) \geq 1$ pour tout réel x .
5. Montrer que, pour tous réels a et b : $c(a + b) = c(a)c(b) + s(a)s(b)$.

Exercice S6 : Concentration d'un médicament

Un patient reçoit une injection. La concentration du médicament dans le sang, en mg/L, est modélisée par $C(t) = 4te^{-0,5t}$, où $t \in [0; 10]$ est le temps écoulé en heures depuis l'injection.

1. Calculer $C(0)$. Montrer que, pour tout $t \in [0; 10]$, $C'(t) = 2(2 - t)e^{-0,5t}$.
2. Dresser le tableau de variations de C sur $[0; 10]$. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Donner cette valeur maximale arrondie au centième.
3. Calculer $C'(1)$ et interpréter ce résultat avec une unité.
4. Le médicament est efficace tant que la concentration est supérieure ou égale à 1 mg/L. On exécute le script suivant.

```
from math import exp
t = 2
while 4 * t * exp(-0.5 * t) >= 1:
    t = t + 1
print(t)
```

Quelle valeur ce script affiche-t-il ? En déduire, en justifiant par le sens de variation, à partir de quelle heure entière la concentration reste strictement inférieure à 1 mg/L.

Exercice S7 : Une suite géométrique issue de l'exponentielle

On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = e^{-0,2n}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique. Donner sa raison q (valeur approchée à 10^{-4} près) et son premier terme.
2. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. Calculer la valeur exacte de $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 0,01$. Quelle valeur renvoie-t-il ? Justifier par deux calculs.

Exercice S8 : Une inégalité fondamentale

1. Soit $h(x) = e^x - x - 1$. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
2. En remplaçant x par $-x$, montrer que $e^{-x} \geq 1 - x$. En déduire que, pour tout réel $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
3. Donner un encadrement de $e^{0,1}$ (valeurs décimales exactes pour la borne inférieure, valeur approchée à 10^{-3} près par excès pour la borne supérieure).
4. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.
5. On exécute un programme qui affiche $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ arrondi à 10^{-4} pour $n = 10, 100$ puis 1000 et on lit 2,5937, 2,7048, 2,7169. Ces résultats sont-ils cohérents avec la question précédente ?

Exercice S9 : Déterminer une fonction à partir de conditions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont deux réels. Sa courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0; -1)$ et la tangente à $\mathcal{C}$ en A a pour coefficient directeur 2.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et x .
2. Traduire les deux conditions par deux équations puis déterminer a et b .
3. Pour la suite, $f(x) = (3x - 1)e^x$. Donner l'équation de la tangente en A .
4. Déterminer le point de $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale. Préciser ses coordonnées exactes.

Exercice S10 : Méthode d'Euler pour approcher e

Pour une fonction f dérivable et h proche de 0, on utilise l'approximation par la tangente : $f(x + h) \approx f(x) + h f'(x)$. Pour $f = \exp$, comme $\exp' = \exp$, on obtient $\exp(x + h) \approx (1 + h)\exp(x)$. Avec un pas $h = \frac{1}{n}$, on construit les valeurs $y_0 = 1$ et $y_{k+1} = (1 + h)y_k$, où y_k approche $\exp(kh)$; en particulier y_n approche $\exp(1) = e$.

1. Pour $n = 4$ ($h = 0,25$), calculer y_1, y_2, y_3 et y_4 (valeurs exactes sous forme décimale).

- Montrer que la suite (y_k) est géométrique, puis que $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- On exécute le script suivant. Quelle valeur renvoie `euler(4)` ?

```
def euler(n):
    h = 1 / n
    y = 1
    for k in range(n):
        y = y + h * y
    return y
```

- Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $e - y_n < 0,1$ (avec `e` la valeur approchée de e fournie par Python), puis donner la valeur renvoyée en justifiant par deux calculs de y_n arrondis à 10^{-4} .

```
from math import e
n = 1
while ..... :
    n = n + 1
print(n)
```

- Pour construire une approximation de la courbe de $\exp$ sur $[0; 1]$, on garde tous les points $(x_k; y_k)$ avec $x_k = kh$. La fonction suivante renvoie la liste de ces points.

```
def euler_points(n):
    h = 1 / n
    L = [(0, 1)]
    y = 1
    for k in range(1, n + 1):
        y = y + h * y
        L.append((k * h, y))
    return L
```

Donner `euler_points(4)`. Comparer chaque ordonnée y_k à $\exp(x_k)$, dont les valeurs approchées sont 1,2840 ; 1,6487 ; 2,1170 ; 2,7183 pour $x_k = 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1$. Que constate-t-on ?

Exercice S11 : Intérêts continus et décroissance radioactive

Partie A : un capital. On place 2000 € et on modélise le capital, en euros, après t années ($t \geq 0$ réel) par $C(t) = 2000e^{0,03t}$.

- Calculer $C(0)$ puis $C(10)$ (arrondir au centime).
- Montrer que $C'(t) = 0,03C(t)$. Interpréter cette relation : de quelle fraction du capital celui-ci augmente-t-il par an, à l'instant t ?
- Pour n entier, montrer que la suite $(C(n))$ est géométrique et donner sa raison (valeur approchée à 10^{-4}). Comparer $C(10)$ avec le capital obtenu après 10 ans à intérêts composés annuels de 3 % (arrondir au centime).

Partie B : décroissance radioactive. Un échantillon contient initialement 8 millions de noyaux radioactifs. Le nombre de noyaux restants, en millions, est $N(t) = 8e^{-0,1t}$, où $t \geq 0$ est le temps en jours.

- Étudier le sens de variation de N sur $[0; +\infty[$. Calculer $N(10)$ (arrondir à 10^{-2}).
- Montrer que, d'un jour au suivant, le nombre de noyaux est multiplié par $e^{-0,1}$. Quel pourcentage de noyaux disparaît chaque jour, à 0,1 % près ?
- Le script suivant renvoie le premier jour entier où il reste moins d'un million de noyaux. Quelle valeur affiche-t-il ? Justifier par deux calculs.

```
from math import exp
```

```
t = 0
while 8 * exp(-0.1 * t) >= 1:
    t = t + 1
print(t)
```