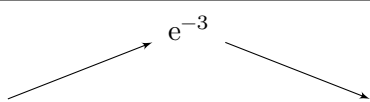


Corrigé : Fonction exponentielle

Fiche Standard

S1.

1. $f = uv$ avec $u(x) = x - 2$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $v'(x) = -e^{-x}$ et $f'(x) = e^{-x} - (x - 2)e^{-x} = (1 - x + 2)e^{-x} = (3 - x)e^{-x}$.
2. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3 - x$. Donc $f'(x) > 0$ si $x < 3$, $f'(3) = 0$ et $f'(x) < 0$ si $x > 3$. On a $f(3) = 1 \times e^{-3} = e^{-3}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

3. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $x - 2$. Donc $f(x) < 0$ si $x < 2$, $f(2) = 0$ et $f(x) > 0$ si $x > 2$.
4. $f(0) = -2$ et $f'(0) = 3$, donc $T : y = 3(x - 0) - 2 = 3x - 2$.
5. D'après le tableau, f admet un maximum en 3, égal à e^{-3} : pour tout réel x , $f(x) \leq f(3) = e^{-3}$. Comme f est strictement croissante sur $] -\infty ; 3]$ et strictement décroissante sur $[3 ; +\infty[$, on a $f(x) < e^{-3}$ pour $x \neq 3$.
Conclusion : l'équation $f(x) = e^{-3}$ a pour unique solution $x = 3$.

S2.

1. On multiplie numérateur et dénominateur par $e^x \neq 0$: $g(x) = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
2. $g(-x) = \frac{1}{1 + e^x}$, donc $g(x) + g(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = 1$.
Le milieu des points $(x ; g(x))$ et $(-x ; g(-x))$ a pour ordonnée $\frac{g(x) + g(-x)}{2} = \frac{1}{2}$ et pour abscisse 0 : **la courbe de g est symétrique par rapport au point $I(0 ; \frac{1}{2})$.**
3. $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^x + 1 > 0$:

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. $e^x > 0$ et $e^x + 1 > e^x$, donc $0 < \frac{e^x}{e^x + 1} < 1$.
5. $1 - g(x) = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$, donc $g(x)(1 - g(x)) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = g'(x)$.
6. $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g'(0) = \frac{1}{4}$: la tangente a pour équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

S3.

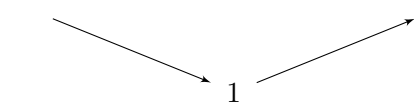
1. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 + X - 2 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$, $X_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$. $X_1 < 0$ est rejetée (car $e^x > 0$). $e^x = 1 = e^0$ donne $x = 0$. $S = \{0\}$.
2. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - (e + e^2)X + e^3 = 0$. $\Delta = (e + e^2)^2 - 4e^3 = e^2 - 2e^3 + e^4 = (e^2 - e)^2 > 0$. Les racines sont $X_1 = \frac{e + e^2 - (e^2 - e)}{2} = e$ et $X_2 = \frac{e + e^2 + (e^2 - e)}{2} = e^2$, toutes deux strictement positives. $e^x = e^1$ donne $x = 1$ et $e^x = e^2$ donne $x = 2$. $S = \{1 ; 2\}$.
3. Avec $X = e^x$, l'inéquation s'écrit $(X - e)(X - e^2) \leq 0$: polynôme de coefficient dominant positif, négatif entre les racines, soit $e \leq X \leq e^2$. Donc $e^1 \leq e^x \leq e^2$, et par stricte croissance de l'exponentielle, $1 \leq x \leq 2$. $S = [1 ; 2]$.

S4.

1. L'exponentielle est strictement croissante : $e^{x^2} = e^{x+2} \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. $\Delta = 9$, d'où $x = \frac{1-3}{2} = -1$ ou $x = \frac{1+3}{2} = 2$. $S = \{-1; 2\}$.
2. $e^{x^2} \leq e^{3x-2} \Leftrightarrow x^2 \leq 3x-2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2]$. $S = [1; 2]$.
3. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: le signe est celui de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, strictement positif pour $x < -1$ ou $x > 1$. $S =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
4. On factorise : $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$. Comme $e^x \neq 0$, l'équation équivaut à $e^x = 1 = e^0$, soit $x = 0$. $S = \{0\}$.

S5.

1. $c^2 - s^2 = (c-s)(c+s)$. Or $c(x) + s(x) = e^x$ et $c(x) - s(x) = e^{-x}$. Donc $c(x)^2 - s(x)^2 = e^{-x}e^x = 1$.
2. $c'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = s(x)$ et $s'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = c(x)$.
3. $s(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$ (stricte croissance de l'exponentielle).
4. $c' = s$ est négative sur $] -\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$, avec $c(0) = \frac{1+1}{2} = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$c'(x)$	-	0	+
c			

c admet un minimum égal à 1 en 0, donc $c(x) \geq 1$ pour tout réel x .

5. On développe, avec $e^a e^b = e^{a+b}$:

$$4c(a)c(b) = e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b},$$

$$4s(a)s(b) = e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}.$$

La somme vaut $2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}$, donc $c(a)c(b) + s(a)s(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = c(a+b)$.

S6.

1. $C(0) = 0$. $C = uv$ avec $u(t) = 4t$, $v(t) = e^{-0,5t}$, $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$: $C'(t) = 4e^{-0,5t} - 2te^{-0,5t} = (4-2t)e^{-0,5t} = 2(2-t)e^{-0,5t}$.
2. Pour tout t , $e^{-0,5t} > 0$: $C'(t)$ a le signe de $2-t$. C est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 10]$. $C(2) = 8e^{-1} \approx 2,94$ et $C(10) = 40e^{-5} \approx 0,27$.

t	0	2	10
$C'(t)$	+	0	-
C	0	$8e^{-1}$	$40e^{-5}$

Conclusion : la concentration est maximale 2 heures après l'injection et vaut environ 2,94 mg/L.

3. $C'(1) = 2 \times 1 \times e^{-0,5} \approx 1,21$. À la fin de la première heure, la concentration augmente d'environ 1,21 mg/L par heure.
4. $C(2) \approx 2,94 \geq 1$, la boucle démarre. Comme C est décroissante sur $[2; 10]$, la boucle continue tant que $C(t) \geq 1$. On calcule $C(6) = 24e^{-3} \approx 1,19 \geq 1$, donc la boucle continue jusqu'à $t = 6$ inclus, puis $C(7) = 28e^{-3,5} \approx 0,85 < 1$: la boucle s'arrête. Le script affiche **7**.

Comme C est décroissante sur $[2; 10]$ et $C(7) < 1$, on a $C(t) < 1$ pour tout $t \in [7; 10]$; et $C(6) \geq 1$.

Conclusion : à partir de la 7^e heure, la concentration reste strictement inférieure à 1 mg/L.

S7.

1. $u_{n+1} = e^{-0,2(n+1)} = e^{-0,2n} \times e^{-0,2} = e^{-0,2} u_n$. La suite est géométrique de raison $q = e^{-0,2} \approx 0,8187$ et de premier terme $u_0 = 1$.
2. $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ (car $-0,2 < 0$ donc $e^{-0,2} < e^0 = 1$) : la suite est strictement décroissante.
3. $S = u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-0,2}} \approx 4,770$.
4.

```
from math import exp
n = 0
while exp(-0.2 * n) >= 0.01:
    n = n + 1
print(n)
```

 $u_{23} = e^{-4,6} \approx 0,01005 \geq 0,01$ et $u_{24} = e^{-4,8} \approx 0,00823 < 0,01$. Le script renvoie **24**. La suite étant décroissante, $u_n < 0,01$ pour tout $n \geq 24$.

S8.

1. $h'(x) = e^x - 1$. Or $e^x > 1 = e^0 \iff x > 0$ (stricte croissance). Donc $h'(x) < 0$ si $x < 0$, $h'(0) = 0$ et $h'(x) > 0$ si $x > 0$: h admet un minimum en 0, égal à $h(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Donc $h(x) \geq 0$, soit $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .
2. L'inégalité appliquée à $-x$ donne $e^{-x} \geq -x + 1$. Si $x < 1$, alors $1 - x > 0$ et $e^{-x} \geq 1 - x > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$: $\frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x}$, c'est-à-dire $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
3. Pour $x = 0,1$: $1,1 \leq e^{0,1} \leq \frac{1}{0,9} = 1,111... < 1,112$. Encadrement : $1,1 \leq e^{0,1} \leq 1,112$.
4. Avec $x = \frac{1}{n}$: $e^{1/n} \geq 1 + \frac{1}{n} > 0$. La fonction $y \mapsto y^n$ est croissante sur $[0; +\infty[$: $(e^{1/n})^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Or $(e^{1/n})^n = e^1 = e$.
5. Ces trois valeurs sont inférieures à $e \approx 2,7183$ comme le prévoit la question 4, et elles s'en rapprochent quand n augmente : les résultats sont cohérents.

S9.

1. $f = uv$ avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^x$: $f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.
 2. $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = b = -1$. Le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(0) = a + b = 2$, d'où $a = 3$. Donc $a = 3$ et $b = -1$.
 3. $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$: $y = 2x - 1$.
 4. $f'(x) = (3x + 2)e^x$ a le signe de $3x + 2$; il s'annule uniquement pour $x = -\frac{2}{3}$. Et $f\left(-\frac{2}{3}\right) = (-2 - 1)e^{-2/3} = -3e^{-2/3}$.
- Conclusion :** la tangente est horizontale au seul point $\left(-\frac{2}{3}; -3e^{-2/3}\right)$.

S10.

1. $y_1 = 1 \times 1,25 = 1,25$, $y_2 = 1,25 \times 1,25 = 1,5625$, $y_3 = 1,5625 \times 1,25 = 1,953125$ et $y_4 = 1,953125 \times 1,25 = 2,44140625$.
2. Pour tout entier k , $y_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_k$: la suite (y_k) est géométrique de raison $1 + \frac{1}{n}$ et de premier terme $y_0 = 1$. Donc $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$ et $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
3. La fonction `euler(4)` répète 4 fois l'instruction `y = y + h * y` avec $h = 0,25$: elle calcule y_4 et renvoie **2,44140625**.
4. Le test de boucle est `e - euler(n) >= 0.1` (la fonction `euler` de la question 3 est supposée définie

avant la boucle). On calcule $y_{12} = \left(\frac{13}{12}\right)^{12} \approx 2,6130$ et $e - y_{12} \approx 0,1052 \geq 0,1$, puis $y_{13} = \left(\frac{14}{13}\right)^{13} \approx 2,6206$ et $e - y_{13} \approx 0,0977 < 0,1$. Le script renvoie **13**.

Conclusion : il faut déjà 13 étapes pour approcher e à moins de 0,1 par cette méthode : la convergence est lente. Pour n plus grand, l'approximation reste par défaut (voir l'exercice S8, question 4).

5. Pour $n = 4$, la fonction renvoie :

$[(0, 1), (0.25, 1.25), (0.5, 1.5625), (0.75, 1.953125), (1.0, 2.44140625)]$

Les écarts avec $\exp(x_k)$ sont : $1,2840 - 1,25 \approx 0,034$; $1,6487 - 1,5625 \approx 0,086$; $2,1170 - 1,9531 \approx 0,164$; $2,7183 - 2,4414 \approx 0,277$. Tous les points sont **en dessous** de la courbe de $\exp$ et l'écart augmente avec x : la ligne brisée construite approche la courbe de $\exp$, de moins en moins bien quand on s'éloigne de 0. Avec un pas plus petit, l'approximation s'améliore.

S11. Partie A.

1. $C(0) = 2000 e^0 = 2000$ €. $C(10) = 2000 e^{0,3} \approx 2000 \times 1,349859 \approx 2699,72$ €.
2. $C'(t) = 2000 \times 0,03 e^{0,03t} = 0,03 C(t)$. À chaque instant, le capital augmente, par an, de 3 % de sa valeur : la vitesse d'accroissement est proportionnelle au capital (c'est la propriété $f' = kf$ des fonctions exponentielles).
3. $C(n+1) = 2000 e^{0,03n+0,03} = e^{0,03} \times C(n)$: la suite $(C(n))$ est géométrique de raison $e^{0,03} \approx 1,0305$. Après 10 ans à intérêts composés annuels de 3 %, on obtient $2000 \times 1,03^{10} \approx 2687,83$ €, soit un peu moins que $C(10) \approx 2699,72$ € : la raison annuelle 1,0305 est légèrement supérieure à 1,03.

Partie B.

4. $N'(t) = 8 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -0,8e^{-0,1t} < 0$: N est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. $N(10) = 8e^{-1} \approx 2,94$ millions.
5. $N(t+1) = 8e^{-0,1t-0,1} = e^{-0,1} N(t)$. Comme $e^{-0,1} \approx 0,9048$, le nombre de noyaux est multiplié par 0,9048 chaque jour : il baisse d'environ 9,5 % par jour.
6. Le script cherche le plus petit entier t tel que $N(t) < 1$. $N(20) = 8e^{-2} \approx 1,083 \geq 1$ et $N(21) = 8e^{-2,1} \approx 0,980 < 1$; comme N est décroissante, le script affiche **21**.

Conclusion : un capital placé à taux continu de 3 % suit la loi $C(t) = C_0 e^{0,03t}$, et les noyaux d'un échantillon disparaissent selon une loi $N_0 e^{-\lambda t}$, qui se traduit par une suite géométrique quand on observe jour après jour.