

Fonction exponentielle

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Les démonstrations du cours

On admet l'existence d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, notée $\exp$, telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

1. On pose $\varphi(x) = \exp(x)\exp(-x)$. Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que φ est constante. Montrer alors que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout x , puis que $\exp$ ne s'annule jamais.
2. **Unicité.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On pose $\psi = \frac{f}{\exp}$. Montrer que $\psi' = 0$, puis que $f = \exp$.
3. **Relation fonctionnelle.** Soit a un réel fixé. On pose $g(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$. Montrer que $g' = g$ et $g(0) = 1$, puis que $\exp(a+x) = \exp(a)\exp(x)$ pour tout réel x .
4. Montrer que $\exp(x) > 0$ pour tout réel x (on écrira $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$).
5. À l'aide de la relation fonctionnelle, montrer que, pour tous réels a, b et x : $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$, $\exp(2x) = (\exp(x))^2$ et $\exp(3x) = (\exp(x))^3$. Quelle égalité peut-on conjecturer pour $\exp(nx)$ avec n entier naturel ? (On l'obtient en appliquant $n-1$ fois la relation fonctionnelle.)

Exercice D2 : Fonctions vérifiant $f' = kf$ (pour aller plus loin, hors programme)

Cet exercice sort du programme de Première : les équations différentielles $y' = ky$ relèvent de la classe de Terminale. Il est proposé comme approfondissement. **Partie A.** Soit k un réel et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = kf$. On pose $g(x) = f(x)e^{-kx}$.

1. Montrer que g est constante. En déduire que $f(x) = f(0)e^{kx}$ pour tout réel x .
2. Réciproquement, vérifier que, pour tout réel C , la fonction $x \mapsto Ce^{kx}$ vérifie $f' = kf$.

Partie B.

3. Déterminer l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = -2f$ et $f(1) = 3$.
4. Le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon vérifie $N'(t) = -0,1N(t)$ avec $N(0) = N_0 > 0$ (t en jours). Exprimer $N(t)$. Au bout de combien de jours reste-t-il exactement la proportion e^{-1} des noyaux initiaux ?

Partie C. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x)f(y)$.

5. Montrer que $f(0) = 1$.
6. En dérivant par rapport à x l'égalité (avec y fixé), montrer que $f'(y) = f'(0)f(y)$. En déduire que $f(x) = e^{kx}$ où $k = f'(0)$.

Exercice D3 : Une famille de courbes

Pour tout réel a , on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x+a)e^{-x}$ et $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $f'_a(x) = (1-a-x)e^{-x}$.
2. Dresser le tableau de variations de f_a . Montrer que f_a admet un maximum atteint en un point M_a dont on précisera les coordonnées en fonction de a .
3. Montrer que tous les points M_a appartiennent à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
4. Déterminer le réel a pour lequel le maximum de f_a est égal à 1, puis celui pour lequel il est égal à e .
5. Soient a et b deux réels distincts. Calculer $f_a(x) - f_b(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$. Ces courbes ont-elles un point commun ?
6. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_a$ au point d'abscisse 0. Montrer que toutes ces tangentes passent par un même point P dont on déterminera les coordonnées.

Exercice D4 : Une fonction impaire et bornée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x . Que peut-on en dire pour la courbe de f ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ et en déduire le sens de variation de f .
3. Montrer que $1 - f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ et que $1 + f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$. En déduire que $-1 < f(x) < 1$ pour tout réel x .
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$ (on remarquera que le second membre est une valeur de f), puis l'équation $f(x) = 1$.

Exercice D5 : Encadrer le nombre e

On rappelle l'inégalité $e^x \geq x + 1$ valable pour tout réel x .

1. Soit $h_2(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$. Calculer $h_2'(x)$ et montrer que $h_2(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
2. Soit $h_3(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que $h_3(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $e \geq \frac{8}{3}$.
3. Soit $k(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que $k'(x) \geq 0$, puis que $k(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
4. Soit $m(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ sur $[0; +\infty[$. Montrer que $m(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $e \leq 3$.
5. Conclure : $\frac{8}{3} \leq e \leq 3$. Quelle est la précision de cet encadrement (amplitude) ?

Exercice D6 : Chute d'un parachutiste (exercice type bac)

La vitesse (en m/s) d'un parachutiste t secondes après le saut est modélisée, pour $t \geq 0$, par $v(t) = 50(1 - e^{-0,2t})$.

1. Calculer $v(0)$. Montrer que v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que $v(t) < 50$ pour tout $t \geq 0$.
2. L'accélération est $a(t) = v'(t)$. Calculer $a(t)$, donner $a(0)$ et interpréter. Montrer que a est strictement décroissante.
3. Montrer que v vérifie l'équation $v'(t) = 10 - 0,2v(t)$.
4. Déterminer le temps t pour lequel $v(t) = 50(1 - e^{-1})$, puis calculer la vitesse correspondante à 0,1 m/s près.
5. On souhaite connaître la première seconde entière à partir de laquelle la vitesse atteint au moins 45 m/s, soit 90 % de la vitesse limite. Compléter le script ci-dessous et donner la valeur renvoyée.

```
from math import exp
t = 0
while ..... :
    t = t + 1
print(t)
```

Justifier par deux calculs de $v(t)$, puis par le sens de variation que la vitesse reste supérieure à 45 m/s ensuite.

Exercice D7 : Suite arithmético-géométrique à raison e^{-1}

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{-1}u_n + 2$. On pose $\ell = \frac{2}{1 - e^{-1}}$.

1. Vérifier que $\ell = e^{-1}\ell + 2$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison e^{-1} .
2. En déduire que $u_n = \ell(1 - e^{-n})$ pour tout entier naturel n .
3. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que $0 \leq u_n < \ell$ pour tout n . Que peut-on conjecturer pour le comportement de (u_n) ? (On admet que e^{-n} se rapproche de 0 quand n devient grand.)
4. Calculer ℓ à 10^{-3} près. Écrire un script Python renvoyant le plus petit entier n tel que $u_n > 3,1$ et donner la valeur renvoyée. Justifier par deux calculs.