

Corrigé : Fonction exponentielle

Fiche Défi

D1.

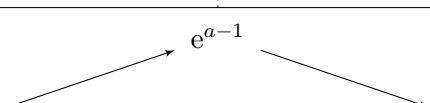
1. $\varphi'(x) = \exp'(x) \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp'(-x)) = \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0$. Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\varphi(0) = \exp(0) \exp(0) = 1$. Ainsi $\exp(x) \exp(-x) = 1$ pour tout x : un produit égal à 1 n'a aucun facteur nul, donc $\exp(x) \neq 0$.
2. $\exp$ ne s'annule pas, donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi' = \frac{f' \exp - f \exp'}{\exp^2} = \frac{f \exp - f \exp}{\exp^2} = 0$. Donc ψ est constante, égale à $\psi(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = 1$. Ainsi $f = \exp$: il n'y a qu'une seule fonction vérifiant ces conditions.
3. g est dérivable (composée de $x \mapsto a + x$ et de $\exp$, divisée par la constante non nulle $\exp(a)$) et $g'(x) = \frac{\exp'(a+x)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = g(x)$. De plus $g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$. Par unicité (question 2), $g = \exp$, soit $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$, donc $\exp(a+x) = \exp(a) \exp(x)$.
4. $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (\exp \frac{x}{2})^2 \geq 0$, et $\exp(x) \neq 0$ d'après la question 1. Donc $\exp(x) > 0$.
5. D'après la question 1, $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$, donc $\exp(a-b) = \exp(a) \exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$. Ensuite $\exp(2x) = \exp(x+x) = \exp(x) \exp(x) = (\exp(x))^2$ et $\exp(3x) = \exp(2x+x) = (\exp(x))^2 \exp(x) = (\exp(x))^3$. En continuant ainsi, on conjecture $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ pour tout entier naturel n , et, avec $\exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)}$, la même formule pour n entier relatif ; c'est la notation $e^{nx} = (e^x)^n$.

D2.

1. $g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x) \times (-ke^{-kx}) = (kf(x) - kf(x))e^{-kx} = 0$. Donc g est constante, égale à $g(0) = f(0)$. Ainsi $f(x)e^{-kx} = f(0)$, d'où $f(x) = f(0)e^{kx}$ (on multiplie par e^{kx}).
 2. $(Ce^{kx})' = kCe^{kx} = k \times (Ce^{kx})$.
 3. D'après la partie A avec $k = -2$: $f(x) = Ce^{-2x}$. La condition $f(1) = Ce^{-2} = 3$ donne $C = 3e^2$, donc $f(x) = 3e^2 e^{-2x} = 3e^{2-2x}$. Vérification : $f'(x) = -6e^{2-2x} = -2f(x)$ et $f(1) = 3e^0 = 3$.
 4. $N(t) = N_0 e^{-0,1t}$. La proportion restante est $\frac{N(t)}{N_0} = e^{-0,1t} = e^{-1} \iff -0,1t = -1 \iff t = 10$.
- Conclusion** : au bout de 10 jours, il reste la proportion e^{-1} des noyaux initiaux.
5. Avec $x = y = 0$: $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0)(f(0) - 1) = 0$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout x , $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$: f serait identiquement nulle, ce qui est exclu. Donc $f(0) = 1$.
 6. On fixe y et on dérive $x \mapsto f(x+y) = f(x)f(y)$: $f'(x+y) = f'(x)f(y)$. Pour $x = 0$: $f'(y) = f'(0)f(y)$. D'après la partie A avec $k = f'(0)$: $f(x) = f(0)e^{kx} = e^{kx}$.

D3.

1. $f_a = uv$ avec $u(x) = x + a$ et $v(x) = e^{-x}$: $f'_a(x) = e^{-x} - (x+a)e^{-x} = (1-a-x)e^{-x}$.
2. Pour tout x , $e^{-x} > 0$: $f'_a(x)$ a le signe de $1-a-x$, positif si $x < 1-a$ et négatif si $x > 1-a$. Et $f_a(1-a) = (1-a+a)e^{-(1-a)} = e^{a-1}$.

x	$-\infty$	$1-a$	$+\infty$
$f'_a(x)$	+	0	-
f_a			

Le maximum est atteint en $M_a(1-a; e^{a-1})$.

3. Pour $x = 1-a$: $e^{-x} = e^{-(1-a)} = e^{a-1}$, qui est l'ordonnée de M_a . Donc $M_a \in \Gamma$ pour tout a .

4. $e^{a-1} = 1 = e^0 \iff a = 1$; $e^{a-1} = e^1 \iff a = 2$.
5. $f_a(x) - f_b(x) = (x+a)e^{-x} - (x+b)e^{-x} = (a-b)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, cette différence a le signe de $a-b$ pour tout x : si $a > b$, $\mathcal{C}_a$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_b$; si $a < b$, elle est strictement en dessous. La différence ne s'annule jamais : **les courbes n'ont aucun point commun**.
6. $f_a(0) = a$ et $f'_a(0) = 1-a$: $y = (1-a)x + a$. Le point $P(x_P; y_P)$ appartient à toutes ces tangentes si $y_P = a(1-x_P) + x_P$ pour tout a , ce qui exige $1-x_P = 0$, soit $x_P = 1$, puis $y_P = 1$. Vérification : pour $x = 1$, $(1-a) + a = 1$.

Conclusion : toutes les tangentes en 0 passent par $P(1; 1)$.

D4.

1. $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$. On multiplie numérateur et dénominateur par e^x : $f(-x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x)$. La fonction est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
2. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x - 1$, $v(x) = e^x + 1 > 0$: $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $1 - f(x) = \frac{e^x + 1 - e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2}{e^x + 1}$ et $1 + f(x) = \frac{e^x + 1 + e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Ces deux quantités sont strictement positives (car $e^x > 0$), donc $f(x) < 1$ et $f(x) > -1$.
4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: $y = \frac{x}{2}$.
5. Le second membre vaut $f(2)$ par définition de f . Comme f est strictement croissante, elle prend chaque valeur au plus une fois : l'équation $f(x) = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = f(2)$ a pour unique solution $x = 2$. Pour $f(x) = 1$: impossible car $f(x) < 1$ pour tout x (question 3). $S = \emptyset$.

D5.

1. $h'_2(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ d'après l'inégalité rappelée. Donc h_2 est croissante sur $[0; +\infty[$, et $h_2(0) = 1 - 1 = 0$: $h_2(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
2. $h'_3(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = h_2(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Donc h_3 est croissante sur $[0; +\infty[$ avec $h_3(0) = 0$: $h_3(x) \geq 0$. Pour $x = 1$: $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.
3. $k'(x) = -1 + x + e^{-x}$. D'après l'inégalité appliquée à $-x$, $e^{-x} \geq 1 - x$, donc $k'(x) \geq 0$. k est croissante sur $[0; +\infty[$ et $k(0) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$: $k(x) \geq 0$.
4. $m'(x) = -e^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2} = k(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Donc m est croissante avec $m(0) = 1 - 1 = 0$: $m(x) \geq 0$. Pour $x = 1$: $e^{-1} \geq 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, $e \leq 3$.
5. $\frac{8}{3} \leq e \leq 3$, avec une amplitude de $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. (Valeur réelle : $e \approx 2,718$.)

D6.

1. $v(0) = 50(1 - 1) = 0$. $v'(t) = 50 \times 0,2e^{-0,2t} = 10e^{-0,2t} > 0$: v est strictement croissante. Comme $e^{-0,2t} > 0$, on a $v(t) = 50 - 50e^{-0,2t} < 50$.
2. $a(t) = 10e^{-0,2t}$ et $a(0) = 10 \text{ m/s}^2$: au départ, le parachutiste accélère comme en chute libre ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$). $a'(t) = -2e^{-0,2t} < 0$: a est strictement décroissante (l'accélération diminue au fur et à mesure que la vitesse approche 50 m/s).
3. $10 - 0,2v(t) = 10 - 10(1 - e^{-0,2t}) = 10e^{-0,2t} = v'(t)$.
4. $v(t) = 50(1 - e^{-1}) \iff e^{-0,2t} = e^{-1} \iff -0,2t = -1 \iff t = 5$. Alors $v(5) = 50(1 - e^{-1}) \approx 31,6 \text{ m/s}$.
5. Le test de boucle est $50 * (1 - \exp(-0.2 * t)) < 45$. On trouve $v(11) = 50(1 - e^{-2,2}) \approx 44,46 < 45$ et $v(12) = 50(1 - e^{-2,4}) \approx 45,46 \geq 45$. Le script renvoie **12**. Comme v est croissante, $v(t) \geq v(12) \geq 45$ pour tout $t \geq 12$.

Conclusion : la vitesse atteint 90 % de la vitesse limite 12 secondes après le saut.

D7.

1. $\ell(1 - e^{-1}) = 2$, donc $\ell = e^{-1}\ell + 2$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = e^{-1}u_n + 2 - (e^{-1}\ell + 2) = e^{-1}(u_n - \ell) = e^{-1}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison e^{-1} et de premier terme $v_0 = -\ell$.
2. $v_n = -\ell e^{-n}$ (car $(e^{-1})^n = e^{-n}$), donc $u_n = \ell + v_n = \ell(1 - e^{-n})$.
3. Pour tout n , $-(n+1) < -n$ donc $e^{-(n+1)} < e^{-n}$: $1 - e^{-n}$ est strictement croissante, et $\ell > 0$, donc (u_n) est strictement croissante. De plus $0 < e^{-n} \leq 1$, donc $0 \leq 1 - e^{-n} < 1$ et $0 \leq u_n < \ell$. On conjecture que (u_n) se rapproche de ℓ (elle est croissante et majorée par ℓ).
4. $\ell = \frac{2}{1 - e^{-1}} = \frac{2e}{e - 1} \approx 3,164$.

```

from math import exp
u = 0
n = 0
while u <= 3.1:
    u = exp(-1) * u + 2
    n = n + 1
print(n)

```

On a $u_3 = \ell(1 - e^{-3}) \approx 3,006 \leq 3,1$ et $u_4 = \ell(1 - e^{-4}) \approx 3,106 > 3,1$. Le script renvoie 4.