

Corrigé : Fonction exponentielle**Fiche Bases****B1.**

1. $A(x) = e^{3x+(-x+2)} = e^{2x+2}$ (car $e^a \times e^b = e^{a+b}$).
2. $B(x) = e^{(2x+1)-(x-3)} = e^{x+4}$ (car $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$).
3. $C(x) = e^{-3x} \times e^x = e^{-2x}$ (car $(e^a)^n = e^{na}$ puis $e^a \times e^b = e^{a+b}$).
4. $D(x) = e^x \times e^{-x} + 2e^x = e^0 + 2e^x = 1 + 2e^x$.
5. On développe : $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ et $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. Donc $E(x) = 4$.
6. $F(x) = \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x - 1$, car $e^x + 1 > 0$.

B2.

1. **Faux.** Pour $a = b = 0$: $e^{0+0} = 1$ alors que $e^0 + e^0 = 2$. La bonne règle est $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
2. **Vrai.** La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $e^{-x} > 0$ pour tout x .
3. **Faux.** Pour $x = 0$: $e^0 = 1$ et $2e^0 = 2$. En fait $e^{2x} = (e^x)^2$.
4. **Faux.** Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $e^x \neq 0$.
5. **Faux.** La dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $-e^{-x} < 0$: cette fonction est strictement décroissante.
6. **Vrai.** $\frac{e^3}{e^5} = e^{3-5} = e^{-2}$.
7. **Vrai.** Pour $f = \exp$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$, donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$.

B3. Chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$.

1. $f_1'(x) = 3e^{3x}$.
2. $f_2'(x) = -2e^{-2x+1}$.
3. $f_3'(x) = 5 \times \frac{1}{2}e^{x/2} = \frac{5}{2}e^{x/2}$.
4. $f_4'(x) = e^x + 2x$.
5. $f_5'(x) = -3 \times (-e^{-x}) = 3e^{-x}$.
6. $f_6'(x) = 2 \times (-3)e^{-3x} + 2e^{2x} = -6e^{-3x} + 2e^{2x}$.

B4.

1. $f = uv$ avec $u(x) = 2x - 1$, $v(x) = e^x$: $f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x$.
2. $g = uv$ avec $u(x) = x^2$, $v(x) = e^{-x}$: $g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$.
3. $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2 + 1 > 0$: $h'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$.
4. $k = uv$ avec $u(x) = x + 3$, $v(x) = e^{2x}$: $k'(x) = e^{2x} + 2(x + 3)e^{2x} = (2x + 7)e^{2x}$.

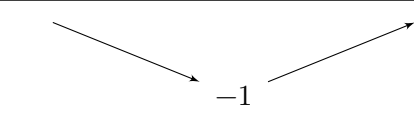
B5.

1. L'exponentielle est strictement croissante : $e^{2x} = e^{x+3} \iff 2x = x + 3 \iff x = 3$. $S = \{3\}$.
2. $e^{3x-1} = e^0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
3. $e^x \times e^{x-1} = e^{2x-1}$ donc $e^{2x-1} = e^5 \iff 2x - 1 = 5 \iff x = 3$. $S = \{3\}$.
4. $e^{x^2} = e^4 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2; 2\}$.
5. $e^{-x} < e^2 \iff -x < 2 \iff x > -2$. $S =]-2; +\infty[$.
6. $e^{2x+1} \geq e^3 \iff 2x + 1 \geq 3 \iff x \geq 1$. $S = [1; +\infty[$.
7. Pour tout réel x , $e^x > 0 > -5$. $S = \mathbb{R}$.
8. Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $e^x \neq -2$. $S = \emptyset$.

B6.

1. $f = uv$ avec $u(x) = x - 1$, $v(x) = e^x$: $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$.
2. Pour tout réel x , $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de x . Donc $f'(x) < 0$ si $x < 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ si

$x > 0$. Avec $f(0) = -1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

3. En 0 : $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$, donc $y = -1$ (tangente horizontale). En 1 : $f(1) = 0$ et $f'(1) = e$, donc $y = e(x - 1)$.

B7.

- $\mathcal{C}_3$ est décroissante : c'est la courbe de g (seule fonction décroissante, car $g'(x) = -e^{-x} < 0$). Pour $x > 0$, $e^x > e^{x/2}$ car $x > x/2$ et l'exponentielle est strictement croissante : la courbe la plus haute à droite est $\mathcal{C}_2$, courbe de f . Reste $\mathcal{C}_1$, courbe de h .
- $f(1) = e \approx 2,7$ (ordonnée de $\mathcal{C}_2$ en $x = 1$). L'équation $e^x = 2$ a pour solution environ 0,7 (abscisse du point de $\mathcal{C}_2$ d'ordonnée 2).
- Graphiquement, $\mathcal{C}_3$ est sous $\mathcal{C}_1$ pour $x > 0$. Par le calcul : $e^{-x} < e^{x/2} \iff -x < \frac{x}{2} \iff 0 < \frac{3x}{2} \iff x > 0$. Ensemble : $]0; +\infty[$.
- $f'(0) = e^0 = 1 : y = x + 1$. $g'(0) = -e^0 = -1 : y = -x + 1$. $h'(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} : y = \frac{x}{2} + 1$.

B8. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $e^{a(n+1)} = e^{an} \times e^a$.

- $u_{n+1} = e^{2n+2} = e^2 u_n$: géométrique de raison e^2 et $u_0 = e^0 = 1$. Comme $e^2 > 1$, elle est croissante.
- $v_{n+1} = e^{-0,5n-0,5+1} = e^{-0,5} v_n$: géométrique de raison $e^{-0,5}$ et $v_0 = e^1 = e$. Comme $0 < e^{-0,5} < 1$ et $v_0 > 0$, elle est décroissante.
- $w_{n+1} = 3e^{0,2n}e^{0,2} = e^{0,2} w_n$: géométrique de raison $e^{0,2}$ et $w_0 = 3$. Comme $e^{0,2} > 1$ et $w_0 > 0$, elle est croissante.

Valeurs exactes : $u_3 = e^6$ et $v_2 = e^{-1+1} = e^0 = 1$.

B9.

- $N(0) = 200$, $N(5) = 200e^{1,5} \approx 896$ et $N(6) = 200e^{1,8} \approx 1\,210$.
- Le script cherche le plus petit entier t tel que $N(t) > 1000$. Comme $N(5) \approx 896 \leq 1000$ et $N(6) \approx 1\,210 > 1000$, il affiche **6**.

Conclusion : la population dépasse 1 000 bactéries au bout de 6 heures.

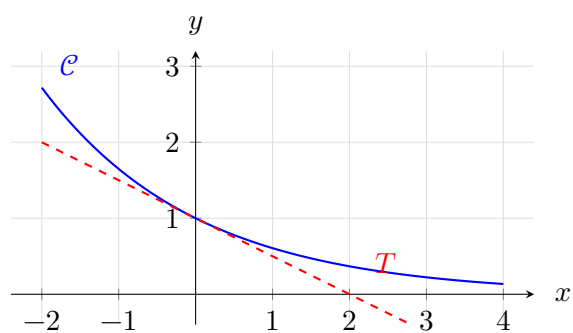
- Avec 3000 : $N(9) = 200e^{2,7} \approx 2\,976 \leq 3000$ et $N(10) = 200e^3 \approx 4\,017 > 3000$. Le script affiche **10**.

B10.

- $f'(x) = -0,5e^{-0,5x} < 0$ pour tout réel x : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$ et $f'(0) = -0,5$: $T : y = -0,5x + 1$.
- Valeurs : $f(-2) = e^1 \approx 2,72$, $f(-1) = e^{0,5} \approx 1,65$, $f(0) = 1$, $f(1) = e^{-0,5} \approx 0,61$, $f(2) = e^{-1} \approx 0,37$, $f(4) = e^{-2} \approx 0,14$.

x	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	2,72	1,65	1	0,61	0,37	0,14

- On place les points du tableau et on les relie par une courbe lisse, décroissante, qui reste au-dessus de l'axe des abscisses et se rapproche de lui quand x augmente. La tangente T passe par $(0; 1)$ et $(2; 0)$, et $\mathcal{C}$ est située au-dessus de T (car $e^u \geq u + 1$ avec $u = -0,5x$).



5. La courbe de $x \mapsto e^{0,5x} = f(-x)$ est la symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées.