

Fiche 3 : équations, inéquations et modélisation

Neuf exercices pour **résoudre** avec l'exponentielle et **modéliser** :

- équations et inéquations ;
- équation du second degré en e^x ;
- une population de bactéries (suite et Python) ;
- un refroidissement ;
- vrai/faux ;
- décroissance exponentielle et seuil ;
- dilution d'une solution : modèle discret et modèle continu ;
- un capital : intérêts composés et modèle continu.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- on **ramène** à $e^{\dots} = e^{\dots}$ avant de conclure ;
- on **cite la croissance** de l'exponentielle pour comparer les exposants ;
- dans un problème, la conclusion est **une phrase avec l'unité**.

Le modèle de rédaction pour une équation

« $e^{2x} = e^{x+3} \iff 2x = x + 3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. D'où $x = 3$. »

- **Ramène** les deux membres à une exponentielle.
- **Justifie** par la stricte croissance.
- **Vérifie** que la solution est dans l'ensemble d'étude.

Les pièges classiques

- Résoudre $e^x = -2$: il n'y a **aucune** solution.
- Garder une racine $X \leq 0$ après le changement de variable $X = e^x$.
- Écrire $e^{x^2} = e^4 \iff x = 2$: on oublie $x = -2$.
- Donner un résultat sans unité dans un problème de modélisation.

Une bactérie qui occupe un volume négatif, ça existe dans les copies, jamais dans les boîtes de Petri.

Exercice 1 (★) : équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} = e^{x+3}$;

2. $e^{3x-1} = 1$;

3. $e^x = e^{-x}$;

4. $e^{x^2} = e^4$.

Correction de l'exercice 1**Question 1**

La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^a = e^b \iff a = b$.

$$e^{2x} = e^{x+3} \iff 2x = x + 3 \iff x = 3.$$

$$S = \{3\}.$$

Question 2

$$1 = e^0, \text{ donc } e^{3x-1} = 1 \iff 3x - 1 = 0.$$

$$3x = 1, \text{ soit } x = \frac{1}{3}.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Question 3

$$e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff 2x = 0.$$

$$S = \{0\}.$$

Question 4

$$e^{x^2} = e^4 \iff x^2 = 4.$$

Les solutions de $x^2 = 4$ sont -2 et 2 .

$$S = \{-2; 2\}.$$

Exercice 2 (★★) : inéquationsRésoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x+1} \geq e^3$;

2. $e^{-x} < e^2$;

3. $e^x > -5$;

4. $e^{x^2} \leq e$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^a \geq e^b \iff a \geq b$.

$$2x + 1 \geq 3 \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1.$$

$$S = [1; +\infty[.$$

Question 2

$$e^{-x} < e^2 \iff -x < 2.$$

On multiplie par -1 : on change le sens, $x > -2$.

$$S =]-2; +\infty[.$$

Question 3

Pour tout réel x , $e^x > 0 > -5$.

$$S = \mathbb{R}.$$

Question 4

$$e = e^1, \text{ donc } e^{x^2} \leq e^1 \iff x^2 \leq 1.$$

$$x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

$$S = [-1; 1].$$

Exercice 3 (★★) : se ramener au second degréRésoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$;

2. $e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

On pose $X = e^x$. Comme $e^x > 0$, on cherche $X > 0$.

L'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.

Les racines sont $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

$X_1 = -2 < 0$ est rejetée : $e^x = -2$ est impossible.

$X_2 = 1$ donne $e^x = 1 = e^0$, donc $x = 0$.

$S = \{0\}$.

Question 2

On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - (1+e)X + e = 0$.

$\Delta = (1+e)^2 - 4e = 1 + 2e + e^2 - 4e = (e-1)^2 > 0$.

$X_1 = \frac{(1+e) - (e-1)}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{(1+e) + (e-1)}{2} = e$.

Les deux sont strictement positives.

$e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = e \iff x = 1$.

$S = \{0; 1\}$.

Exercice 4 (★★) : une population de bactéries

Une population de bactéries est modélisée par $N(t) = 500 e^{0,4t}$, où t est le temps en heures, $t \geq 0$.

1. Donner la population initiale, puis la population (arrondie à l'unité) au bout de 5 heures.
2. Montrer que N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. Compléter le script pour qu'il renvoie la première heure entière où la population dépasse 10 000 :

```
from math import exp

def seuil():
    t = 0
    while .....:
        t = t + 1
    return t
```

4. Quelle valeur renvoie ce script ? Conclure par une phrase.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$N(0) = 500e^0 = 500 \times 1 = 500.$$

$$N(5) = 500e^2 \approx 3695.$$

Population initiale : 500 bactéries. Au bout de 5 heures : environ 3 695 bactéries.

Question 2

$$N'(t) = 500 \times 0,4 e^{0,4t} = 200 e^{0,4t}.$$

Pour tout t , $e^{0,4t} > 0$: $N'(t) > 0$.

N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Question 3

On continue tant que la population **ne dépasse pas** 10 000.

```
while 500 * exp(0.4 * t) <= 10000:
```

Question 4

On calcule $N(7) \approx 8222$ (pas encore 10 000) et $N(8) \approx 12266$ (plus de 10 000).

Le script renvoie 8 : la population dépasse 10 000 bactéries au bout de 8 heures.

Exercice 5 (★★★) : le refroidissement d'un café

La température (en °C) d'un café t minutes après son service est $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$, pour $t \geq 0$.

1. Quelle est la température initiale ? Quelle est la température au bout de 10 minutes (arrondie au dixième) ?
2. Étudier le sens de variation de T .
3. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $T(t) > 20$. Interpréter.
4. Au bout de combien de minutes entières le café passe-t-il sous 30 °C ? (On pourra tester des valeurs.)

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$T(0) = 20 + 60e^0 = 80.$$

$$T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 42,1.$$

Température initiale : 80 °C. Après 10 minutes : environ 42,1 °C.

Question 2

$$T'(t) = 60 \times (-0,1) e^{-0,1t} = -6e^{-0,1t}.$$

Pour tout t , $e^{-0,1t} > 0$: $T'(t) < 0$.

T est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Question 3

$$60e^{-0,1t} > 0 \text{ pour tout } t, \text{ donc } T(t) = 20 + 60e^{-0,1t} > 20.$$

Le café se rapproche de 20 °C (la température de la pièce) sans jamais la dépasser par le bas.

Question 4

$$T(17) \approx 30,96 : \text{encore au-dessus de } 30 \text{ °C.}$$

$$T(18) \approx 29,92 : \text{en dessous de } 30 \text{ °C.}$$

T est décroissante : à partir de $t = 18$, la température reste sous 30 °C.

Le café passe sous 30 °C au bout de 18 minutes.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. L'équation $e^x = 0$ a une solution.
2. Pour tous réels x et y , $e^x < e^y \Rightarrow x < y$.
3. $e^{2x} - 1 \geq 0$ équivaut à $x \geq 0$.
4. L'équation $e^{2x} + e^x + 1 = 0$ a deux solutions.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Une exponentielle est strictement positive : elle ne s'annule jamais.

Faux.

Affirmation 2

La fonction exponentielle est strictement croissante : elle conserve l'ordre, donc $e^x < e^y \Rightarrow x < y$.**Vrai.**

Affirmation 3

$$e^{2x} \geq 1 = e^0 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

Vrai.

Affirmation 4

Pour tout x , $e^{2x} > 0$, $e^x > 0$, donc $e^{2x} + e^x + 1 > 1 > 0$: jamais nul.(Avec $X = e^x$: $X^2 + X + 1$ a un discriminant $-3 < 0$.)**Faux : aucune solution.**

Exercice 7 (★★) : décroissance exponentielle et seuil

Une substance se désintègre : sa masse en grammes est $m(t) = 80 e^{-0,05t}$ (t en heures).

1. Calculer la masse initiale et la masse au bout de 10 heures (arrondie au dixième).
2. Montrer que m est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
3. Écrire un script Python qui donne le premier entier t tel que $m(t) \leq 40$ (la masse a été divisée par deux) et donner ce résultat.

```
from math import exp

t = 0
while 80 * exp(-0.05 * t) > 40:
    t = t + 1
print(t)
```

4. En déduire un encadrement de la demi-vie de cette substance par deux entiers consécutifs (la demi-vie est la durée au bout de laquelle la masse est divisée par deux).

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$m(0) = 80 e^0 = 80.$$

$$m(10) = 80 e^{-0,5} \approx 48,5.$$

La masse initiale est 80 g et il reste environ 48,5 g au bout de 10 h.

Question 2

$$m'(t) = 80 \times (-0,05) e^{-0,05t} = -4 e^{-0,05t}.$$

Comme $e^{-0,05t} > 0$, $m'(t) < 0$: la fonction m est strictement décroissante.

Question 3

Le script teste les entiers un par un. Les valeurs de m autour du seuil sont $m(13) = 80 e^{-0,65} \approx 41,8 > 40$ et $m(14) = 80 e^{-0,7} \approx 39,7 \leq 40$.

Le script affiche 14 : au bout de 14 heures, la masse est passée sous 40 g.

Question 4

La masse vaut 41,8 g à la 13e heure et 39,7 g à la 14e : comme m est décroissante, elle passe par 40 g entre ces deux instants.

La demi-vie est comprise entre 13 et 14 heures.

Exercice 8 (★★) : dilution d'une solution : modèle continu et modèle discret

Un réservoir de volume constant contient une solution colorée dont la concentration est de 50 g/L. On renouvelle son contenu en continu avec de l'eau pure : la concentration à l'instant t (en heures) est $c(t) = 50 e^{-0,2t}$.

1. Calculer $c(0)$ et $c(5)$ (arrondi au dixième).
2. Montrer que $c'(t) = -0,2 c(t)$ et interpréter cette relation.
3. Écrire un script qui donne la première heure entière à partir de laquelle la concentration est strictement inférieure à 5 g/L.
4. On modélise la même situation par pas d'une heure : à chaque heure, 18 % de la solution est renouvelée, donc $c_{n+1} = 0,82 c_n$ avec $c_0 = 50$. Quelle est la nature de la suite (c_n) ? Calculer c_5 et comparer à $c(5)$.

Correction de l'exercice 8

Question 1

$$c(0) = 50 e^0 = 50 \text{ et } c(5) = 50 e^{-1} \approx 18,4.$$

Au départ 50 g/L ; au bout de 5 h, environ 18,4 g/L.

Question 2

$$c'(t) = 50 \times (-0,2) e^{-0,2t} = -0,2 \times 50 e^{-0,2t}.$$

$c'(t) = -0,2 c(t)$: la concentration diminue à une vitesse proportionnelle à elle-même (plus elle est élevée, plus elle baisse vite).

Question 3

```
from math import exp

t = 0
while 50 * exp(-0.2 * t) >= 5:
    t = t + 1
print(t)    # affiche 12
```

On a $c(11) \approx 5,54 \geq 5$ et $c(12) \approx 4,54 < 5$.

À partir de la 12e heure, la concentration est inférieure à 5 g/L.

Question 4

$c_{n+1} = 0,82 c_n$ pour tout n : la suite est géométrique de raison 0,82, donc $c_n = 50 \times 0,82^n$.

$c_5 = 50 \times 0,82^5 \approx 18,5$, à comparer à $c(5) \approx 18,4$.

Les deux modèles donnent presque la même valeur, car $e^{-0,2} \approx 0,819$ est proche de la raison 0,82 : $c(n) = 50 (e^{-0,2})^n$ est lui aussi géométrique.

Exercice 9 (★★★) : un capital : intérêts composés et modèle continu

On place 2000 € à 3 % par an. Deux modèles sont proposés, avec n et t en années :

modèle A (intérêts composés chaque année) : $u_n = 2000 \times 1,03^n$;

modèle B (évolution continue) : $C(t) = 2000 e^{0,03t}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique. Calculer u_{10} et $C(10)$ (arrondis au centime).
2. Montrer que la suite $(C(n))$ est géométrique et donner sa raison.
3. En utilisant l'inégalité $e^x \geq x + 1$, comparer $e^{0,03}$ et 1,03, puis en déduire que $C(n) \geq u_n$ pour tout entier naturel n .
4. Écrire un script qui donne, pour chaque modèle, la première année entière où le capital atteint 3000 €.

Correction de l'exercice 9

Question 1

$u_{n+1} = 2000 \times 1,03^{n+1} = 1,03 \times u_n$: la suite est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $u_0 = 2000$.

$u_{10} = 2000 \times 1,03^{10} \approx 2687,83$ et $C(10) = 2000 e^{0,3} \approx 2699,72$.

$u_{10} \approx 2687,83$ € et $C(10) \approx 2699,72$ €.

Question 2

$C(n+1) = 2000 e^{0,03(n+1)} = e^{0,03} \times 2000 e^{0,03n} = e^{0,03} C(n)$.

$(C(n))$ est géométrique de raison $e^{0,03} \approx 1,0305$ et de premier terme $C(0) = 2000$.

Question 3

D'après l'inégalité $e^x \geq x + 1$ avec $x = 0,03$: $e^{0,03} \geq 1,03$.

Les deux nombres sont positifs, donc $(e^{0,03})^n \geq 1,03^n$ pour tout entier n .

En multipliant par 2000 : $C(n) = 2000 (e^{0,03})^n \geq 2000 \times 1,03^n = u_n$.

Pour tout entier naturel n , $C(n) \geq u_n$: le modèle continu rapporte un peu plus que les intérêts composés annuels.

Question 4

```

from math import exp

n = 0
while 2000 * 1.03 ** n < 3000:
    n = n + 1
print(n)    # affiche 14

t = 0
while 2000 * exp(0.03 * t) < 3000:
    t = t + 1
print(t)    # affiche 14

```

Modèle A : $u_{13} \approx 2937,1 < 3000$ et $u_{14} \approx 3025,2 \geq 3000$. Modèle B : $C(13) \approx 2954,0 < 3000$ et $C(14) \approx 3043,9 \geq 3000$.

Dans les deux modèles, le capital atteint 3000 € au bout de 14 ans.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Résoudre** $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ et les inéquations associées (exercices 1 et 2).
- **Poser** $X = e^x$ et rejeter les racines négatives (exercice 3).
- **Modéliser** : valeur initiale, sens de variation, seuil avec Python (exercices 4, 5, 7 et 8).
- Un **vrai/faux** sur les équations (exercice 6).
- **Comparer** une évolution discrète (suite géométrique) et une évolution continue (exercices 8 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La solution de $e^{3x} = e^6$ est :

- A. $x = 18$
- B. $x = 2$ (bonne réponse)
- C. $x = 3$
- D. $x = \frac{1}{2}$

Justification : $e^a = e^b \iff a = b : 3x = 6$, soit $x = 2$.

2. L'ensemble des solutions de $e^{x+1} > e^4$ est :

- A. $]3; +\infty[$ (bonne réponse)
- B. $] - \infty; 3[$
- C. $]5; +\infty[$
- D. $\mathbb{R}$

Justification : L'exponentielle est croissante : $x + 1 > 4 \iff x > 3$.

3. L'équation $e^x = -2$:

- A. a une solution
- B. a deux solutions
- C. n'a aucune solution (bonne réponse)**
- D. a pour solution $x = -2$

Justification : Une exponentielle est strictement positive : jamais égale à -2 .

4. Les solutions de $e^{2x} - e^x = 0$ sont :

- A. $x = 0$ uniquement (bonne réponse)**
- B. $x = 0$ et $x = 1$
- C. $x = 1$ uniquement
- D. aucune

Justification : $e^x(e^x - 1) = 0$. Comme $e^x \neq 0$, $e^x = 1$ donc $x = 0$.

5. $N(t) = 100e^{0,5t}$ avec $t \geq 0$. Alors N est :

- A. décroissante et $N(0) = 0$
- B. croissante et $N(0) = 100$ (bonne réponse)**
- C. croissante et $N(0) = 50$
- D. constante

Justification : $N(0) = 100e^0 = 100$ et $N'(t) = 50e^{0,5t} > 0$.