

## Fiche 2 : dérivées et variations

Neuf exercices pour **dériver** avec l'exponentielle et **étudier des variations** :

- dérivées de  $e^{at}$  et de  $e^{ax+b}$  ;
- dérivées de produits ;
- dérivées de quotients ;
- variations d'un produit par une exponentielle ;
- un maximum à interpréter ;
- vrai/faux ;
- associer des courbes à  $e^{kx}$  ;
- Python : approcher  $e$  ;
- la méthode d'Euler : construire l'exponentielle point par point.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule de dérivation** utilisée est écrite ;
- la dérivée est **factorisée par l'exponentielle** ;
- le signe est **justifié** (l'exponentielle est strictement positive) ;
- la conclusion est une **phrase**.

### Le modèle de rédaction d'une étude avec exponentielle

«  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables.  $f'(x) = \dots = (x-1)e^x$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  :  $f'(x)$  a le signe de  $x-1$ .

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty ; 1]$  et strictement croissante sur  $[1 ; +\infty[$ . »

- **Écris**  $e^x > 0$  : c'est la phrase qui justifie le signe.
- **Factorise** avant d'étudier le signe.
- **Conclus** avec les mots « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

### Les pièges classiques

- $(e^{2x})' = e^{2x}$  : oubli du facteur 2.
- $(xe^x)' = e^x$  : oubli de la dérivée du produit.
- Étudier le signe de  $f'$  sans factoriser, puis se tromper sur un signe.
- Oublier de dire que  $e^x > 0$ .

Un correcteur qui lit «  $e^x > 0$  » écrit en marge un petit « oui ». C'est gratuit, fais-lui plaisir.

**Exercice 1 (★) : dériver  $e^{at}$  et  $e^{ax+b}$** 

Dériver sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $f(x) = e^{3x}$  ;
2.  $g(x) = e^{-2x+1}$  ;
3.  $h(x) = 5e^{0,5x}$  ;
4.  $k(x) = e^x + x^2$ .

**Exercice 2 (★★) : dériver des produits**

Dériver sur  $\mathbb{R}$  et factoriser la dérivée :

1.  $f(x) = (x + 1)e^x$  ;
2.  $g(x) = (2x - 3)e^{-x}$  ;
3.  $h(x) = x^2 e^x$ .

**Exercice 3 (★★) : dériver des quotients**

Dériver et simplifier :

1.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  ;
2.  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  sur  $\mathbb{R}$  ;
3.  $h(x) = \frac{x}{e^x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4 (★★) : variations de  $(x - 2)e^x$** 

Soit  $f(x) = (x - 2)e^x$  sur l'intervalle  $[-3; 3]$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = (x - 1)e^x$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Donner le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[-3; 3]$ .
4. Résoudre  $f(x) = 0$ .

**Exercice 5 (★★★) : un maximum à interpréter**

Un capteur mesure la concentration d'un produit dans le sang, en mg/L,  $x$  heures après une prise :  $f(x) = xe^{-x}$  pour  $x \in [0; 5]$ .

1. Montrer que  $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. Interpréter le maximum : à quel instant la concentration est-elle maximale, et quelle est sa valeur (arrondie au centième) ?
4. L'équation  $f(x) = 0,5$  a-t-elle des solutions sur  $[0; 5]$  ? Justifier.
5. Compléter le script pour qu'il affiche le premier instant (au centième d'heure) où la concentration atteint 0,1 mg/L :

```
from math import exp

x = 0
while .....:
    x = round(x + 0.01, 2)
print(x)
```

**Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**

Justifier chaque réponse :

1. La dérivée de  $x \mapsto e^{2x}$  est  $x \mapsto e^{2x}$ .
2. La dérivée de  $x \mapsto xe^x$  est  $x \mapsto e^x$ .
3. La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. La fonction  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7 (★★) : associer des courbes à  $e^{kx}$** 

Les quatre courbes ci-dessous représentent les fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $e^{2x}$ ,  $e^{-x}$  et  $e^{-2x}$  (dans un ordre à trouver).



Quatre courbes de la forme  $y = e^{(kx)}$ , avec  $k = 1, 2, -1$  ou  $-2$

1. Quel point commun ont toutes ces courbes ?
2. Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant par le signe et la valeur de la pente en 0.
3. Comparer  $e^{2x}$  et  $e^x$  pour  $x > 0$  puis pour  $x < 0$ .

**Exercice 8 (★★) : Python : approcher  $e$** 

1. Écrire un programme qui affiche  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pour  $n = 1, 10, 100, 1000$  et  $10^6$ .
2. Que remarque-t-on ? Que dire d'un lien avec le nombre  $e \approx 2,71828$  ?

**Exercice 9 (★★★) : la méthode d'Euler : construire l'exponentielle**

On approche la fonction **exp** sur  $[0; 2]$  par la méthode d'Euler :  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  et, pour un pas  $h$  donné,  $x_{k+1} = x_k + h$  et  $y_{k+1} = y_k + h y_k$ .

1. Justifier la formule  $y_{k+1} = y_k + h y_k$  à l'aide de la tangente à la courbe de **exp** au point d'abscisse  $x_k$ .
2. Avec  $h = 0,5$ , calculer  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  et  $y_4$ , puis comparer  $y_4$  à  $e^2 \approx 7,389$ .
3. Montrer que la suite  $(y_k)$  est géométrique et exprimer  $y_k$  en fonction de  $k$  et de  $h$ . Calculer  $y_{20}$  pour  $h = 0,1$ .
4. Écrire une fonction `euler(h, n)` qui renvoie la liste  $[y_0; y_1; \dots; y_n]$ , puis afficher le dernier terme pour  $n = 4$ ,  $n = 20$  et  $n = 200$  (pas  $h = \frac{2}{n}$ ). Que constate-t-on ?

**Ce qui peut tomber en contrôle**

- **Dériver**  $e^{at}$ , un produit, un quotient (exercices 1 à 3).
- **Factoriser la dérivée** par l'exponentielle (exercices 2, 4 et 5).
- **Dresser un tableau de variations** avec images et conclure (exercices 4 et 5).
- **Interpréter un maximum** en contexte (exercice 5).
- Un **vrai/faux** sur les dérivées (exercice 6).
- **Reconnaître** les courbes de  $e^{kx}$  (exercice 7).
- **Construire** l'exponentielle par la méthode d'Euler avec Python (exercice 9).

**QCM : une seule bonne réponse par question**

1. La dérivée de  $f(x) = e^{5x}$  est :

- A.  $e^{5x}$
- B.  $5e^{5x}$
- C.  $5e^x$
- D.  $e^5 x$

2. La dérivée de  $f(x) = xe^x$  est :

- A.  $e^x$
- B.  $xe^x$
- C.  $(x+1)e^x$
- D.  $(x-1)e^x$

3. La dérivée de  $f(x) = e^{-x}$  est :

- A.  $e^{-x}$

B.  $-e^{-x}$

C.  $-e^x$

D.  $\frac{1}{e^x}$

4. Si  $f'(x) = (x - 3)e^x$ , alors  $f$  est :

A. croissante sur  $] -\infty ; 3]$  puis décroissante

B. décroissante sur  $] -\infty ; 3]$  puis croissante

C. croissante sur  $\mathbb{R}$

D. décroissante sur  $\mathbb{R}$

5. Sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto e^{-2x}$  est :

A. strictement croissante

B. strictement décroissante

C. constante

D. croissante puis décroissante