

Fiche 2 : dérivées et variations

Neuf exercices pour **dériver** avec l'exponentielle et **étudier des variations** :

- dérivées de e^{at} et de e^{ax+b} ;
- dérivées de produits ;
- dérivées de quotients ;
- variations d'un produit par une exponentielle ;
- un maximum à interpréter ;
- vrai/faux ;
- associer des courbes à e^{kx} ;
- Python : approcher e ;
- la méthode d'Euler : construire l'exponentielle point par point.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **formule de dérivation** utilisée est écrite ;
- la dérivée est **factorisée par l'exponentielle** ;
- le signe est **justifié** (l'exponentielle est strictement positive) ;
- la conclusion est une **phrase**.

Le modèle de rédaction d'une étude avec exponentielle

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. $f'(x) = \dots = (x-1)e^x$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$. »

- **Écris** $e^x > 0$: c'est la phrase qui justifie le signe.
- **Factorise** avant d'étudier le signe.
- **Conclus** avec les mots « strictement croissante » et « strictement décroissante ».

Les pièges classiques

- $(e^{2x})' = e^{2x}$: oubli du facteur 2.
- $(xe^x)' = e^x$: oubli de la dérivée du produit.
- Étudier le signe de f' sans factoriser, puis se tromper sur un signe.
- Oublier de dire que $e^x > 0$.

Un correcteur qui lit « $e^x > 0$ » écrit en marge un petit « oui ». C'est gratuit, fais-lui plaisir.

Exercice 1 (★) : dériver e^{at} et e^{ax+b}

Dériver sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{3x}$;
2. $g(x) = e^{-2x+1}$;
3. $h(x) = 5e^{0,5x}$;
4. $k(x) = e^x + x^2$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$(e^{at})' = a e^{at} \text{ avec } a = 3.$$

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

Question 2

On écrit $g(x) = e^{-2x+1} = e \times e^{-2x}$, puis on dérive e^{-2x} avec $a = -2$: $g'(x) = e \times (-2)e^{-2x}$.

$$g'(x) = -2e^{-2x+1}$$

Question 3

$h(x) = 5 \times e^{0,5x}$: on garde le coefficient 5 et on multiplie par 0,5.

$$h'(x) = 2,5 e^{0,5x}$$

Question 4

La dérivée est la somme des dérivées.

$$k'(x) = e^x + 2x$$

Exercice 2 (★★) : dériver des produits

Dériver sur $\mathbb{R}$ et factoriser la dérivée :

1. $f(x) = (x+1)e^x$;
2. $g(x) = (2x-3)e^{-x}$;
3. $h(x) = x^2e^x$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Avec $u = x + 1$, $v = e^x$: $u' = 1$, $v' = e^x$.

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x + 1)e^x = e^x (1 + x + 1).$$

$$f'(x) = (x + 2)e^x$$

Question 2

Avec $u = 2x - 3$, $v = e^{-x}$: $u' = 2$, $v' = -e^{-x}$.

$$g'(x) = 2e^{-x} + (2x - 3) \times (-e^{-x}) = e^{-x} (2 - (2x - 3)).$$

$$g'(x) = e^{-x} (2 - 2x + 3).$$

$$g'(x) = (5 - 2x)e^{-x}$$

Question 3

Avec $u = x^2$, $v = e^x$: $u' = 2x$, $v' = e^x$.

$$h'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x (2x + x^2).$$

$$h'(x) = x(x + 2)e^x$$

Exercice 3 (★★) : dériver des quotients

Dériver et simplifier :

1. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$;

2. $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$;

3. $h(x) = \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Avec $u = e^x$, $v = x$: $u' = e^x$, $v' = 1$ et v ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}$$

Question 2

Avec $u = e^x$, $v = e^x + 1$: $u' = e^x$, $v' = e^x$. Le dénominateur $e^x + 1 > 0$ ne s'annule pas.

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2}.$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Question 3

Avec $u = x$, $v = e^x$: $u' = 1$, $v' = e^x$.

$$h'(x) = \frac{1 \times e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = (1 - x) e^{x-2x}.$$

$$h'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Exercice 4 (★★) : variations de $(x - 2)e^x$ Soit $f(x) = (x - 2)e^x$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (x - 1)e^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Donner le minimum et le maximum de f sur $[-3; 3]$.
4. Résoudre $f(x) = 0$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

 f est dérivable sur $[-3; 3]$ comme produit de fonctions dérivables.Avec $u = x - 2$ et $v = e^x$: $f'(x) = 1 \times e^x + (x - 2)e^x = e^x(1 + x - 2)$.

$$f'(x) = (x - 1)e^x$$

Question 2

Pour tout x , $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. $f'(x) < 0$ sur $[-3; 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; 3]$.On calcule $f(-3) = -5e^{-3} \approx -0,25$, $f(1) = -e \approx -2,72$ et $f(3) = e^3 \approx 20,09$.

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-5e^{-3}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	e^3

 f est strictement décroissante sur $[-3; 1]$ et strictement croissante sur $[1; 3]$.

Question 3

Le minimum est atteint en $x = 1$. Le maximum est atteint à une borne : $f(3) \approx 20,09$ est supérieur à $f(-3) \approx -0,25$.

Le minimum de f sur $[-3; 3]$ est $-e$ (en 1) et son maximum est e^3 (en 3).

Question 4

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Or $e^x \neq 0$.

Donc $f(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

On vérifie : $2 \in [-3; 3]$.

L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution : $x = 2$.

Exercice 5 (★★★) : un maximum à interpréter

Un capteur mesure la concentration d'un produit dans le sang, en mg/L, x heures après une prise : $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \in [0; 5]$.

1. Montrer que $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Interpréter le maximum : à quel instant la concentration est-elle maximale, et quelle est sa valeur (arrondie au centième) ?
4. L'équation $f(x) = 0,5$ a-t-elle des solutions sur $[0; 5]$? Justifier.
5. Compléter le script pour qu'il affiche le premier instant (au centième d'heure) où la concentration atteint 0,1 mg/L :

```
from math import exp

x = 0
while .....:
    x = round(x + 0.01, 2)
print(x)
```

Correction de l'exercice 5

Question 1

f est dérivable sur $[0; 5]$. Avec $u = x$ et $v = e^{-x}$: $u' = 1$, $v' = -e^{-x}$.

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x).$$

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Question 2

Pour tout x , $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - x$.

$f'(x) > 0$ sur $[0; 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]1; 5]$.

On calcule $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$ et $f(5) = 5e^{-5} \approx 0,034$.

x	0		1		5
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗	e^{-1}	↘	$5e^{-5}$

f est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; 5]$.

Question 3

Le maximum de f est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$.

La concentration est maximale 1 heure après la prise : environ 0,37 mg/L.

Question 4

D'après le tableau, pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) \leq f(1) = e^{-1} \approx 0,37 < 0,5$.

L'équation $f(x) = 0,5$ n'a aucune solution sur $[0; 5]$: la concentration n'atteint jamais 0,5 mg/L.

Question 5

On continue tant que la concentration est strictement inférieure à 0,1 :

```
while x * exp(-x) < 0.1:
```

On a $f(0,11) \approx 0,0985 < 0,1$ et $f(0,12) \approx 0,1064 \geq 0,1$.

Le script affiche 0,12 : la concentration atteint 0,1 mg/L environ 0,12 h (soit 7 minutes) après la prise.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. La dérivée de $x \mapsto e^{2x}$ est $x \mapsto e^{2x}$.
2. La dérivée de $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto e^x$.
3. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

$(e^{2x})' = 2e^{2x}$, et $2e^{2x} \neq e^{2x}$ (en $0 : 2 \neq 1$).

Faux.

Affirmation 2

Dérivée d'un produit : $(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. En $x = 1 : 2e \neq e$.

Faux.

Affirmation 3

$(e^{-x})' = -e^{-x} < 0$ pour tout réel x .

Vrai.

Affirmation 4

$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2e^x$.

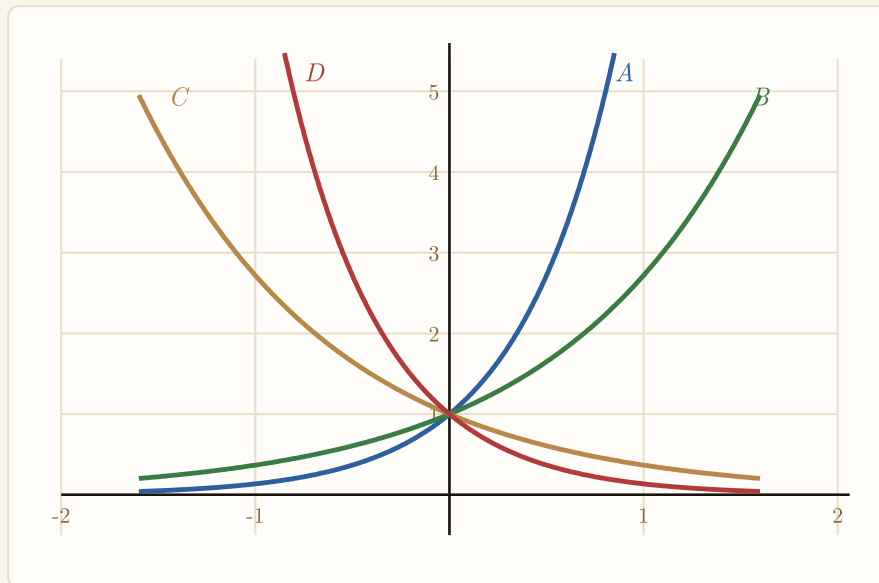
Pour tout x , $f'(x) \geq 0$, et $f'(x) = 0$ seulement en $x = -1$ (un seul point).

Une dérivée positive qui ne s'annule qu'en un point isolé donne une fonction strictement croissante.

Vrai.

Exercice 7 (★★) : associer des courbes à e^{kx}

Les quatre courbes ci-dessous représentent les fonctions $x \mapsto e^x$, e^{2x} , e^{-x} et e^{-2x} (dans un ordre à trouver).



Quatre courbes de la forme $y = e^{(kx)}$, avec $k = 1, 2, -1$ ou -2

1. Quel point commun ont toutes ces courbes ?
2. Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant par le signe et la valeur de la pente en 0.
3. Comparer e^{2x} et e^x pour $x > 0$ puis pour $x < 0$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$e^{k \times 0} = e^0 = 1$ pour tout k .

Toutes passent par le point $(0; 1)$.

Question 2

Si $f(x) = e^{kx}$, alors $f'(x) = ke^{kx}$ et $f'(0) = k$: la pente en 0 vaut k .

$k > 0$: la courbe est croissante ; $k < 0$: elle est décroissante.

Plus $|k|$ est grand, plus la pente en 0 est forte.

A : e^{2x} ; B : e^x ; C : e^{-x} ; D : e^{-2x} .

Question 3

Pour $x > 0$: $2x > x$ donc $e^{2x} > e^x$ (la fonction exponentielle est croissante).

Pour $x < 0$: $2x < x$ donc $e^{2x} < e^x$. Les courbes se coupent en $x = 0$.

Exercice 8 (★★) : Python : approcher e

1. Écrire un programme qui affiche $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 1, 10, 100, 1000$ et 10^6 .
2. Que remarque-t-on ? Que dire d'un lien avec le nombre $e \approx 2,71828$?

Correction de l'exercice 8

Question 1

```
for n in [1, 10, 100, 1000, 10**6]:
    print(n, (1 + 1 / n) ** n)
```

On obtient environ 2 ; 2,5937 ; 2,7048 ; 2,7169 ; 2,71828.

Question 2

Les valeurs augmentent et semblent se rapprocher de $e \approx 2,71828$. On admet que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e quand n tend vers l'infini.

La convergence est **lente** : il faut 10^6 pour obtenir cinq décimales.

Exercice 9 (★★★) : la méthode d'Euler : construire l'exponentielle

On approche la fonction **exp** sur $[0; 2]$ par la méthode d'Euler : $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et, pour un pas h donné, $x_{k+1} = x_k + h$ et $y_{k+1} = y_k + h y_k$.

1. Justifier la formule $y_{k+1} = y_k + h y_k$ à l'aide de la tangente à la courbe de **exp** au point d'abscisse x_k .
2. Avec $h = 0,5$, calculer y_1 , y_2 , y_3 et y_4 , puis comparer y_4 à $e^2 \approx 7,389$.
3. Montrer que la suite (y_k) est géométrique et exprimer y_k en fonction de k et de h . Calculer y_{20} pour $h = 0,1$.
4. Écrire une fonction **euler(h, n)** qui renvoie la liste $[y_0; y_1; \dots; y_n]$, puis afficher le dernier terme pour $n = 4$, $n = 20$ et $n = 200$ (pas $h = \frac{2}{n}$). Que constate-t-on ?

Correction de l'exercice 9

Question 1

La fonction **exp** vérifie $\exp' = \exp$: la tangente en $(x_k; y_k)$ a pour coefficient directeur $\exp'(x_k) = \exp(x_k) \approx y_k$.

Pour h petit, la courbe est proche de sa tangente : $\exp(x_k + h) \approx \exp(x_k) + \exp'(x_k) h \approx y_k + h y_k$.

On avance d'un pas h le long de la tangente : $y_{k+1} = y_k + h y_k$.

Question 2

$y_1 = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$; $y_2 = 1,5 \times 1,5 = 2,25$; $y_3 = 3,375$; $y_4 = 5,0625$.

Le point d'abscisse $x_4 = 2$ est donc $(2 ; 5,0625)$, alors que $e^2 \approx 7,389$.

$y_4 = 5,0625$: l'écart avec e^2 est d'environ **2,33**, soit **31 %**. Le pas **0,5** est trop grand.

Question 3

$y_{k+1} = y_k + h y_k = (1 + h) y_k$: la suite est géométrique de raison $1 + h$ et de premier terme $y_0 = 1$.

Donc $y_k = (1 + h)^k$. Pour $h = 0,1$: $y_{20} = 1,1^{20} \approx 6,7275$.

$y_k = (1 + h)^k$ et $y_{20} \approx 6,7275$ pour $h = 0,1$.

Question 4

```
def euler(h, n):
    Y = [1]
    for k in range(n):
        Y.append(Y[-1] + h * Y[-1])
    return Y

for n in (4, 20, 200):
    Y = euler(2 / n, n)
    print(n, Y[-1])
```

On obtient environ **5,0625** ; **6,7275** ; **7,3160**.

Plus le pas est petit, plus y_n se rapproche de $e^2 \approx 7,389$: la ligne brisée d'Euler suit de mieux en mieux la courbe de l'exponentielle, mais la convergence est lente.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Dériver** e^{at} , un produit, un quotient (exercices 1 à 3).
- **Factoriser la dérivée** par l'exponentielle (exercices 2, 4 et 5).
- **Dresser un tableau de variations** avec images et conclure (exercices 4 et 5).
- **Interpréter un maximum** en contexte (exercice 5).
- Un **vrai/faux** sur les dérivées (exercice 6).
- **Reconnaître** les courbes de e^{kx} (exercice 7).
- **Construire** l'exponentielle par la méthode d'Euler avec Python (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La dérivée de $f(x) = e^{5x}$ est :

- A. e^{5x}
- B. $5e^{5x}$ (bonne réponse)
- C. $5e^x$
- D. e^5x

Justification : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ avec $a = 5$.

2. La dérivée de $f(x) = xe^x$ est :

- A. e^x
- B. xe^x
- C. $(x+1)e^x$ (bonne réponse)
- D. $(x-1)e^x$

Justification : $(uv)' = u'v + uv' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

3. La dérivée de $f(x) = e^{-x}$ est :

- A. e^{-x}
- B. $-e^{-x}$ (bonne réponse)
- C. $-e^x$
- D. $\frac{1}{e^x}$

Justification : $a = -1$: $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

4. Si $f'(x) = (x-3)e^x$, alors f est :

- A. croissante sur $] -\infty ; 3]$ puis décroissante
- B. **décroissante sur $] -\infty ; 3]$ puis croissante** (bonne réponse)
- C. croissante sur $\mathbb{R}$
- D. décroissante sur $\mathbb{R}$

Justification : $e^x > 0$: f' a le signe de $x-3$. Négatif avant 3, positif après.

5. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est :

- A. strictement croissante
- B. **strictement décroissante** (bonne réponse)
- C. constante
- D. croissante puis décroissante

Justification : Sa dérivée $-2e^{-2x}$ est strictement négative.