

Fiche 1 : propriétés algébriques

Six exercices pour maîtriser les **règles de calcul** sur l'exponentielle :

- simplifier des nombres et des expressions ;
- démontrer des identités ;
- factoriser et étudier un signe ;
- reconnaître une suite géométrique ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- chaque règle utilisée est **nommée** ;
- chaque étape de calcul est sur **sa propre ligne** ;
- le résultat est **isolé** à la fin de chaque question.

Le modèle de rédaction pour simplifier

« $e^{2x+1} \times e^{-x} = e^{2x+1+(-x)} = e^{x+1}$ car $e^a \times e^b = e^{a+b}$. »

- **Écris la règle** qui justifie chaque ligne.
- **Un seul calcul** par ligne.
- **Conclus** par une seule exponentielle.

Les pièges classiques

- Écrire $e^a + e^b = e^{a+b}$.
- Écrire $e^{2x} = 2e^x$.
- Oublier que e^{-x} est $\frac{1}{e^x}$, donc positif.
- Perdre un signe moins en passant de $\frac{1}{e^{x-2}}$ à e^{-x+2} .

Une exponentielle qui devient négative, c'est un coureur qui arrive avant d'être parti.

Exercice 1 (★) : simplifier des nombres

Écrire sous la forme e^k où k est un réel :

$$A = e^3 \times e^{-5} ;$$

$$B = \frac{e^4}{e^{-1}} ;$$

$$C = (e^2)^{-3} ;$$

$$D = \frac{e^3 \times e^{-5}}{e^{-1}} ;$$

$$E = \frac{1}{e^{-2}}.$$

Exercice 2 (★) : simplifier des expressions

Simplifier, pour tout réel x :

$$A(x) = e^{3x} \times e^{-x} ;$$

$$B(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x-2}} ;$$

$$C(x) = (e^{-x})^2 \times e^{3x} ;$$

$$D(x) = e^x (e^{-x} + 1) ;$$

$$E(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}.$$

Exercice 3 (★★) : démontrer des identités

Démontrer que, pour tout réel x :

$$1. (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4.$$

$$2. \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$3. \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Exercice 4 (★★) : factoriser et étudier un signe

Soit $f(x) = e^{2x} - e^x$ pour tout réel x .

1. Montrer que $f(x) = e^x (e^x - 1)$.
2. Étudier le signe de $e^x - 1$.
3. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 5 (★★) : une suite géométrique

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = e^{3n+1}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Quel est son sens de variation ?
3. Donner la valeur exacte de $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tous réels a et b , $e^a + e^b = e^{a+b}$.
2. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$.
3. Pour tout réel x , $e^{2x} = 2e^x$.
4. Pour tout réel x , $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$.
5. L'équation $e^x = -1$ a une solution.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Simplifier** une expression avec plusieurs exponentielles (exercices 1 et 2).
- **Démontrer une identité** en multipliant par e^x (exercice 3).
- **Factoriser par e^x** pour étudier un signe (exercice 4).
- **Reconnaître une suite géométrique** de raison e^a (exercice 5).
- Un **vrai/faux** sur les règles de calcul (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. $e^3 \times e^{-5}$ est égal à :

A. e^{-2}

B. e^{-15}

C. e^8

D. $-e^2$

2. Pour tout réel x , $(e^x)^4$ est égal à :

A. e^{x+4}

B. $4e^x$

C. e^{4x}

D. e^{x^4}

3. Pour tout réel x , $\frac{e^{x+2}}{e^x}$ est égal à :

A. e^{2x+2}

B. e^2

C. e^x

D. $1 + e^2$

4. Pour tout réel x , le nombre e^x est :

A. strictement positif

B. positif ou nul

C. négatif si $x < 0$

D. du signe de x

5. e^{-x} est égal à :

A. $-e^x$

B. $\frac{1}{e^x}$

C. $e^x - 1$

D. $\frac{e^x}{-1}$