

Fiche 1 : propriétés algébriques

Six exercices pour maîtriser les **règles de calcul** sur l'exponentielle :

- simplifier des nombres et des expressions ;
- démontrer des identités ;
- factoriser et étudier un signe ;
- reconnaître une suite géométrique ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- chaque règle utilisée est **nommée** ;
- chaque étape de calcul est sur **sa propre ligne** ;
- le résultat est **isolé** à la fin de chaque question.

Le modèle de rédaction pour simplifier

« $e^{2x+1} \times e^{-x} = e^{2x+1+(-x)} = e^{x+1}$ car $e^a \times e^b = e^{a+b}$. »

- **Écris la règle** qui justifie chaque ligne.
- **Un seul calcul** par ligne.
- **Conclus** par une seule exponentielle.

Les pièges classiques

- Écrire $e^a + e^b = e^{a+b}$.
- Écrire $e^{2x} = 2e^x$.
- Oublier que e^{-x} est $\frac{1}{e^x}$, donc positif.
- Perdre un signe moins en passant de $\frac{1}{e^{x-2}}$ à e^{-x+2} .

Une exponentielle qui devient négative, c'est un coureur qui arrive avant d'être parti.

Exercice 1 (★) : simplifier des nombres

Écrire sous la forme e^k où k est un réel :

$$A = e^3 \times e^{-5} ;$$

$$B = \frac{e^4}{e^{-1}} ;$$

$$C = (e^2)^{-3} ;$$

$$D = \frac{e^3 \times e^{-5}}{e^{-1}} ;$$

$$E = \frac{1}{e^{-2}}.$$

Correction de l'exercice 1

Les calculs

$$A = e^{3+(-5)} \text{ car } e^a \times e^b = e^{a+b}.$$

$$A = e^{-2}$$

$$B = e^{4-(-1)} \text{ car } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

$$B = e^5$$

$$C = e^{2 \times (-3)} \text{ car } (e^a)^n = e^{na}.$$

$$C = e^{-6}$$

$$D = \frac{e^{3+(-5)}}{e^{-1}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-2-(-1)}.$$

$$D = e^{-1}$$

$$E = \frac{1}{e^{-2}} = e^{-(-2)} \text{ car } \frac{1}{e^a} = e^{-a}.$$

$$E = e^2$$

Exercice 2 (★) : simplifier des expressions

Simplifier, pour tout réel x :

$$A(x) = e^{3x} \times e^{-x} ;$$

$$B(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x-2}} ;$$

$$C(x) = (e^{-x})^2 \times e^{3x} ;$$

$$D(x) = e^x (e^{-x} + 1) ;$$

$$E(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}.$$

Correction de l'exercice 2

Les calculs

$$A(x) = e^{3x+(-x)}.$$

$$A(x) = e^{2x}$$

$$B(x) = e^{(x+1)-(x-2)} = e^{x+1-x+2}.$$

$$B(x) = e^3$$

$$C(x) = e^{-2x} \times e^{3x} = e^{-2x+3x}.$$

$$C(x) = e^x$$

$$D(x) = e^x \times e^{-x} + e^x \times 1 = e^0 + e^x.$$

$$D(x) = 1 + e^x$$

$$E(x) = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^{2x-x} - e^{-x}.$$

$$E(x) = e^x - e^{-x}$$

Exercice 3 (★★) : démontrer des identités

Démontrer que, pour tout réel x :

$$1. (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4.$$

$$2. \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$3. \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Correction de l'exercice 3

Question 1

On reconnaît $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ avec $a = e^x$ et $b = e^{-x}$.

Développons : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$.

Ici $ab = e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

Pour tout réel x : $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Question 2

On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^x , qui est non nul :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + e^x \times e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Question 3

On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^x (non nul) :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0}.$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Exercice 4 (★★) : factoriser et étudier un signe

Soit $f(x) = e^{2x} - e^x$ pour tout réel x .

1. Montrer que $f(x) = e^x(e^x - 1)$.
2. Étudier le signe de $e^x - 1$.
3. En déduire le signe de $f(x)$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x.$$

$$\text{Donc } f(x) = e^x \times e^x - e^x \times 1 = e^x(e^x - 1).$$

$$f(x) = e^x(e^x - 1).$$

Question 2

La fonction exponentielle est **strictement croissante** et $e^0 = 1$.

Donc $e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, et $e^x < 1 \iff x < 0$.

$e^x - 1 < 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $e^x - 1 = 0$ en 0 et $e^x - 1 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

Question 3

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Le signe de $f(x)$ est donc celui de $e^x - 1$.

$f(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 5 (★★) : une suite géométrique

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = e^{3n+1}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Quel est son sens de variation ?
3. Donner la valeur exacte de $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Pour tout entier n : $u_{n+1} = e^{3(n+1)+1} = e^{3n+4} = e^{3n+1} \times e^3 = e^3 u_n$.

Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^3$ est constant.

Le premier terme est $u_0 = e^1 = e$.

(u_n) est géométrique de raison $q = e^3$ et de premier terme $u_0 = e$.

Question 2

La raison $q = e^3 \approx 20,09$ est strictement supérieure à 1 et $u_0 > 0$.

(u_n) est strictement croissante.

Question 3

Somme de 5 termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$: $S = u_0 \times \frac{1 - q^5}{1 - q}$.

$$S = e \times \frac{1 - (e^3)^5}{1 - e^3} = e \times \frac{1 - e^{15}}{1 - e^3}.$$

$$S = \frac{e(e^{15} - 1)}{e^3 - 1}.$$

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Pour tous réels a et b , $e^a + e^b = e^{a+b}$.
2. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$.
3. Pour tout réel x , $e^{2x} = 2e^x$.
4. Pour tout réel x , $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$.
5. L'équation $e^x = -1$ a une solution.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

Contre-exemple : avec $a = b = 0$, $e^0 + e^0 = 2$ et $e^{0+0} = 1$.**Faux.**

Affirmation 2

Pour tout réel X , $e^X > 0$. Avec $X = -x$: $e^{-x} > 0$.**Vrai.**

Affirmation 3

Contre-exemple : $x = 0$ donne $e^0 = 1$ et $2e^0 = 2$.**Faux.**

Affirmation 4

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{2x}.$$

Vrai.

Affirmation 5

Une exponentielle est strictement positive : $e^x = -1$ est impossible.**Faux.**

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Simplifier** une expression avec plusieurs exponentielles (exercices 1 et 2).
- **Démontrer une identité** en multipliant par e^x (exercice 3).
- **Factoriser par e^x** pour étudier un signe (exercice 4).
- **Reconnaître une suite géométrique** de raison e^a (exercice 5).
- Un **vrai/faux** sur les règles de calcul (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. $e^3 \times e^{-5}$ est égal à :

- A. e^{-2} (**bonne réponse**)
- B. e^{-15}
- C. e^8
- D. $-e^2$

Justification : On additionne les exposants : $3 + (-5) = -2$, donc e^{-2} .

2. Pour tout réel x , $(e^x)^4$ est égal à :

- A. e^{x+4}
- B. $4e^x$
- C. e^{4x} (**bonne réponse**)
- D. e^{x^4}

Justification : $(e^a)^n = e^{na}$: on multiplie l'exposant par 4.

3. Pour tout réel x , $\frac{e^{x+2}}{e^x}$ est égal à :

- A. e^{2x+2}
- B. e^2 (**bonne réponse**)
- C. e^x
- D. $1 + e^2$

Justification : On soustrait les exposants : $(x + 2) - x = 2$.

4. Pour tout réel x , le nombre e^x est :

- A. **strictement positif** (**bonne réponse**)
- B. positif ou nul
- C. négatif si $x < 0$
- D. du signe de x

Justification : Une exponentielle est toujours strictement positive.

5. e^{-x} est égal à :

A. $-e^x$

B. $\frac{1}{e^x}$ (bonne réponse)

C. $e^x - 1$

D. $\frac{e^x}{-1}$

Justification : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$: c'est l'inverse de e^x , pas son opposé.