

# Contrôle : chapitre 5, Fonction exponentielle

**Durée :** 45 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

## Exercice 1 (5 points) : Calcul algébrique et équations

1. Écrire sous la forme  $e^k$ , où  $k$  est un réel, le nombre  $A = \frac{(e^2)^3 \times e^{-4}}{e^3}$ , puis, pour tout réel  $x$ , l'expression  $B(x) = \frac{e^{2x+1} \times e^{-x}}{e^{x-3}}$ . (1,5 points)
2. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ . (1,5 points)
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{x^2-3x} = e^{-2}$ . (1 point)
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{1-2x} \geq e^{x+4}$ . (1 point)

## Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ .

1. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$ . (2 points)
2. Étudier le signe de  $f'(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  (les limites aux bornes ne sont pas demandées). Donner la valeur exacte de l'extremum. (2 points)
3. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0. (1,5 points)
4. Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 point)
5. Montrer que l'équation  $f(x) = -1$  admet 0 pour unique solution. (1,5 points)

### Exercice 3 (7 points) : Croissance d'une culture de bactéries

Le nombre de bactéries d'une culture au bout de  $n$  heures est modélisé, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = 500 e^{0,2n}$ .

Le script Python suivant, dont la condition de la boucle a été effacée, détermine le premier entier  $n$  pour lequel la culture compte au moins 5000 bactéries :

```
from math import exp

n = 0
while ... :
    n = n + 1
print(n)
```

1. Calculer  $u_0$  et  $u_3$  (arrondir à l'unité). Interpréter  $u_0$ . (1 point)
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme, puis son sens de variation. (2 points)
3. Recopier et compléter la condition de la boucle **while** du script de l'énoncé, puis donner la valeur affichée en justifiant par un calcul. (1,5 points)
4. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^x - x - 1$ . Étudier les variations de  $h$  et en déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq x + 1$ . (1,5 points)
5. En déduire que  $e^{0,2} \geq 1,2$ , puis que le nombre de bactéries augmente d'au moins 20 % chaque heure. (1 point)