

Contrôle : chapitre 5, Fonction exponentielle

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (5 points) : Calcul algébrique et équations

1. Écrire sous la forme e^k , où k est un réel, le nombre $A = \frac{(e^2)^3 \times e^{-4}}{e^3}$, puis, pour tout réel x , l'expression $B(x) = \frac{e^{2x+1} \times e^{-x}}{e^{x-3}}$. (1,5 points)
2. Démontrer que, pour tout réel x , $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. (1,5 points)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3x} = e^{-2}$. (1 point)
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-2x} \geq e^{x+4}$. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

$$A = \frac{e^6 \times e^{-4}}{e^3} \text{ car } (e^a)^n = e^{na}, \text{ donc } A = \frac{e^2}{e^3} = e^{2-3} \text{ car } e^a \times e^b = e^{a+b} \text{ et } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

$$A = e^{-1}.$$

$$B(x) = \frac{e^{2x+1-x}}{e^{x-3}} = \frac{e^{x+1}}{e^{x-3}} = e^{(x+1)-(x-3)} = e^4.$$

Pour tout réel x , $B(x) = e^4$ (expression constante).

Barème : 0,5 point pour le calcul de A (règles citées) et le résultat e^{-1} ; 1 point pour le calcul de $B(x)$ (règles citées) et le résultat e^4 .

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$: les deux quotients sont bien définis.

On multiplie le numérateur et le dénominateur du membre de droite par e^x , qui est non nul :

$$\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x - e^x \times e^{-x}}{e^x + e^x \times e^{-x}}.$$

Or $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$, d'où $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

L'égalité est démontrée pour tout réel x .

Barème : 0,5 point pour la justification que les dénominateurs ne sont pas nuls ($e^x > 0$) ; 0,5 point pour la multiplication par e^x en haut et en bas ; 0,5 point pour l'utilisation de $e^x \times e^{-x} = 1$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^a = e^b \iff a = b$.

L'équation équivaut à $x^2 - 3x = -2$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$, donc $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.

$S = \{1; 2\}$.

Barème : 0,5 point pour le passage aux exposants avec justification ; 0,5 point pour la résolution du trinôme et l'ensemble solution.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1 point)

La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^a \geq e^b \iff a \geq b$.

L'inéquation équivaut à $1 - 2x \geq x + 4$, soit $-3x \geq 3$, soit $x \leq -1$ (on divise par $-3 < 0$: le sens change).

$S =]-\infty; -1]$.

Barème : 0,5 point pour le passage aux exposants avec le sens conservé ; 0,5 point pour la résolution et le changement de sens en divisant par -3 .

Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$. (2 points)
2. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (les limites aux bornes ne sont pas demandées). Donner la valeur exacte de l'extremum. (2 points)
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0. (1,5 points)
4. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)
5. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet 0 pour unique solution. (1,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^{-x}$: $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -e^{-x}$ (car $(e^{at})' = a e^{at}$ avec $a = -1$).

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)e^{-x} = (2 - 2x + 1)e^{-x}.$$

$$f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}.$$

Barème : 0,5 point pour la dérivabilité justifiée ; 0,5 point pour la dérivée de e^{-x} ; 0,5 point pour la formule du produit ; 0,5 point pour la factorisation par e^{-x} .

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$. Or $3 - 2x > 0 \iff x < \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f		$\nearrow$	$2e^{-3/2}$	$\searrow$	

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2} - 1\right)e^{-3/2} = 2e^{-3/2} \approx 0,45.$$

f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$; son maximum vaut $2e^{-3/2}$, atteint en $x = \frac{3}{2}$.

Barème : 0,5 point pour la phrase « $e^{-x} > 0$ » et le signe de f' ; 0,5 point pour le tableau de variations (flèches cohérentes) ; 0,5 point pour le calcul de $f\left(\frac{3}{2}\right)$; 0,5 point pour la conclusion (maximum et abscisse).

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Une équation de T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$f(0) = (2 \times 0 - 1)e^0 = -1 \text{ et } f'(0) = (3 - 0)e^0 = 3.$$

$$T : y = 3x - 1.$$

Barème : 0,5 point pour la formule de la tangente ; 0,5 point pour $f(0) = -1$; 0,5 point pour $f'(0) = 3$ et l'équation finale.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $2x - 1$.

$$f(x) < 0 \text{ sur } \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } f(x) > 0 \text{ sur } \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[.$$

Barème : 0,5 point pour le signe de $f(x)$ ramené à celui de $2x - 1$ (justifié) ; 0,5 point pour la conclusion avec les trois cas.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1,5 points)

On a $f(0) = -1$: 0 est solution.

D'après la question précédente, si $x > \frac{1}{2}$ alors $f(x) > 0$: l'équation n'a pas de solution dans $\left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ (et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \neq -1$).

Sur $\left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[\subset \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$, f est strictement croissante : elle prend chaque valeur au plus une fois, donc $f(x) = -1$ a au plus une solution sur cet intervalle, qui est 0.

L'équation $f(x) = -1$ a pour unique solution 0.

Barème : 0,5 point pour 0 est solution ; 0,5 point pour aucune solution quand $x > \frac{1}{2}$ (signe de f) ; 0,5 point pour l'unicité sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ par stricte croissance.

Exercice 3 (7 points) : Croissance d'une culture de bactéries

Le nombre de bactéries d'une culture au bout de n heures est modélisé, pour tout entier naturel n , par $u_n = 500 e^{0,2n}$.

Le script Python suivant, dont la condition de la boucle a été effacée, détermine le premier entier n pour lequel la culture compte au moins 5000 bactéries :

```
from math import exp

n = 0
while ... :
    n = n + 1
print(n)
```

1. Calculer u_0 et u_3 (arrondir à l'unité). Interpréter u_0 . (1 point)
2. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme, puis son sens de variation. (2 points)
3. Recopier et compléter la condition de la boucle **while** du script de l'énoncé, puis donner la valeur affichée en justifiant par un calcul. (1,5 points)
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$. Étudier les variations de h et en déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. (1,5 points)
5. En déduire que $e^{0,2} \geq 1,2$, puis que le nombre de bactéries augmente d'au moins 20 % chaque heure. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

$$u_0 = 500 e^0 = 500 \times 1 = 500.$$

$$u_3 = 500 e^{0,6} \approx 911,06 \text{ donc } u_3 \approx 911.$$

La culture compte 500 bactéries au départ et environ 911 bactéries au bout de 3 heures.

Barème : 0,5 point pour $u_0 = 500$ et son interprétation ; 0,5 point pour $u_3 \approx 911$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

Pour tout entier n , $u_{n+1} = 500 e^{0,2(n+1)} = 500 e^{0,2n+0,2} = 500 e^{0,2n} \times e^{0,2} = e^{0,2} u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{0,2}$ et de premier terme $u_0 = 500$.

La fonction exponentielle est strictement croissante et $0,2 > 0$, donc $q = e^{0,2} > e^0 = 1$.

Comme $u_0 > 0$, la suite est strictement croissante.

(u_n) est géométrique de raison $e^{0,2} \approx 1,22$, de premier terme 500, et strictement croissante.

Barème : 1 point pour le calcul de u_{n+1} en fonction de u_n avec $e^{a+b} = e^a e^b$ et la conclusion (raison, premier terme) ; 1 point pour la justification de $q > 1$ (croissance de l'exponentielle) et $u_0 > 0$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

```
from math import exp

n = 0
while 500 * exp(0.2 * n) < 5000:
    n = n + 1
print(n)
```

Tant que le nombre de bactéries est strictement inférieur à 5000, on passe à l'heure suivante : la condition est $500 * \exp(0.2 * n) < 5000$.

Vérification par le calcul : $u_{11} = 500 e^{2,2} \approx 4513 < 5000$ et $u_{12} = 500 e^{2,4} \approx 5512 \geq 5000$.

Le script affiche 12 : la culture dépasse 5000 bactéries au bout de 12 heures.

Barème : 0,5 point pour la condition $500 * \exp(0.2 * n) < 5000$; 0,5 point pour la valeur affichée 12 ; 0,5 point pour la justification ($u_{11} < 5000 \leq u_{12}$) et la phrase avec l'unité.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.

La fonction exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$: $h'(x) < 0$ si $x < 0$, $h'(0) = 0$ et $h'(x) > 0$ si $x > 0$.

Donc h est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un minimum en 0, égal à $h(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

Ainsi $h(x) \geq 0$ pour tout réel x , c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée $h'(x) = e^x - 1$ et son signe justifié ; 0,5 point pour les variations et le minimum $h(0) = 0$; 0,5 point pour la conclusion $e^x \geq x + 1$.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Avec $x = 0,2$ dans l'inégalité précédente : $e^{0,2} \geq 0,2 + 1 = 1,2$.

Pour tout entier n , $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = e^{0,2} u_n \geq 1,2 u_n$.

Chaque heure, le nombre de bactéries est multiplié par au moins 1,2, soit une augmentation d'au moins 20%.

Barème : 0,5 point pour $e^{0,2} \geq 1,2$; 0,5 point pour $u_{n+1} \geq 1,2 u_n$ (avec $u_n > 0$) et la conclusion en pourcentage.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	5
Exercice 2	8
Exercice 3	7
Total	20