

Variations et courbes représentatives : le cours

Un entrepreneur veut le **bénéfice maximal**, un cuisinier la **température idéale**, un ingénieur la **forme la plus économique**. Dans tous les cas, la question est la même : **où une grandeur est-elle la plus grande, ou la plus petite ?**

La dérivée répond à cette question.

Elle dit si une fonction **monte** ou **descend**, donc où elle change de direction.

Ce chapitre t'apprend à en tirer un **tableau de variations**, à repérer les **extremums**, à lire une **courbe**, à profiter d'une **parité** et à résoudre des **problèmes d'optimisation**.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Retiens le fil rouge du chapitre : $f' > 0$, f **monte** ; $f' < 0$, f **descend**. Le signe de la dérivée donne le sens de variation.
- Pour étudier une fonction, retiens les cinq temps : **domaine**, **dérivée factorisée**, **signe**, **tableau**, **conclusion**.

1. Dérivée et sens de variation

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **croissante** sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **décroissante** sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur I .

Si de plus $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **strictement croissante** sur I ; si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, elle est **strictement décroissante**. Cela reste vrai quand $f' \geq 0$ ne s'annule qu'en des points isolés : par exemple $x \mapsto x^3$, dont la dérivée $3x^2$ ne s'annule qu'en 0, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réciproque. Si f est dérivable et croissante sur I , alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (les taux de variation d'une fonction croissante sont positifs). On a donc : f croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur I .

Pourquoi ? $f'(a)$ est la pente de la tangente. Une tangente qui monte indique que la courbe monte ; une tangente qui descend, que la courbe descend.

Exemple. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ a pour dérivée $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. Pour $x < 3$, $f'(x) < 0$: f décroît ; pour $x > 3$, $f'(x) > 0$: f croît.

Pièges :

- On étudie le **signe de f'** , pas celui de f . Une fonction peut être négative et croissante, ou positive et décroissante.
- Le théorème donne le sens de variation **sur un intervalle**. Pour une fonction qui n'est pas définie sur un intervalle (par exemple $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$), on étudie chaque intervalle séparément.
- « f croissante » donne $f' \geq 0$, pas $f' > 0$: la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, et pourtant $f'(0) = 0$.

Confondre le signe de f et celui de f' , c'est confondre l'altitude d'un randonneur et le fait qu'il monte ou descend.

2. Étudier les variations d'une fonction**Méthode en cinq temps**

1. **Domaine** : préciser l'intervalle d'étude et justifier que f est dérivable.
2. **Dérivée** : calculer $f'(x)$ et la **factoriser**.
3. **Signe** : étudier le signe de $f'(x)$ (tableau de signes si besoin).
4. **Tableau** : dresser le tableau de variations, avec les **images** aux valeurs importantes.
5. **Conclusion** : écrire les variations et les extremums en une phrase.

Exemple. Étudions $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[0; 5]$.

f est un polynôme, dérivable sur $[0; 5]$. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ a pour racines 1 et 3 et un coefficient $a = 1 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. On calcule $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$ et $f(5) = 21$.

x	0		1		3		5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	21

f est strictement croissante sur $[0; 1]$, strictement décroissante sur $[1; 3]$, strictement croissante sur $[3; 5]$.

Astuce. Dans le tableau de variations, la ligne de f' sert à justifier celle de f .

Les flèches ↗ et ↘ se lisent ainsi : « $f' > 0$, donc f monte ».

Écris toujours les **images** ($f(1) = 5$, $f(3) = 1$), pas seulement les flèches.

3. Extremums

Définitions. Soit f définie sur I et $a \in I$.

- $f(a)$ est un **maximum local** s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel $f(x) \leq f(a)$; un **minimum local** pour $f(x) \geq f(a)$.
- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$; le **minimum** si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

Théorème. Si f est dérivable sur I et si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a :

- de $+$ à $-$: **maximum local** (f monte, puis descend) ;
- de $-$ à $+$: **minimum local** (f descend, puis monte).

En un extremum local à l'intérieur de I , la tangente est **horizontale** : $f'(a) = 0$.

Exemple. Pour la fonction étudiée plus haut sur $[0; 5]$: maximum local $f(1) = 5$; minimum local $f(3) = 1$.

Mais l'extremum **sur** $[0; 5]$ n'est pas le même : le **maximum** de f sur $[0; 5]$ est $f(5) = 21$ (atteint à la **borne**) ; le **minimum** est 1, atteint en 0 et en 3.

Nombre dérivé en un extremum. Si f est dérivable en a , si a est à l'intérieur de I et si $f(a)$ est un extremum local, alors $f'(a) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite **horizontale** d'équation $y = f(a)$.

Exemple. Pour la fonction étudiée plus haut, les tangentes aux points d'abscisses 1 et 3 ont pour équations $y = 5$ et $y = 1$.

Le mot à retenir est **condition nécessaire** : si $f(a)$ est un extremum local intérieur, alors $f'(a) = 0$. La **reciproque est fautive** (x^3 en 0) : $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante. Ce qui suffit, c'est que f' s'annule **en changeant de signe**.

Attention aux bornes. En une borne de I , l'extremum n'impose rien sur f' : la fonction $x \mapsto x$ sur $[0; 1]$ a son minimum en 0, et pourtant $f'(0) = 1$.

Pièges :

- $f'(a) = 0$ **ne suffit pas** pour avoir un extremum : il faut que f' **change de signe**. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extremum, car f est croissante des deux côtés.
- Un extremum **local** n'est pas forcément l'extremum **sur l'intervalle** : compare avec les valeurs aux bornes.
- L'extremum est la **valeur** $f(a)$ (une ordonnée), atteinte en $x = a$ (une abscisse). Ne donne pas l'un pour l'autre.

« Tangente horizontale, donc extremum » : c'est comme dire « il est en haut de l'escalier parce qu'il est sur un palier ». Il peut être au milieu.

4. Lecture du tableau et nombre de solutions de $f(x) = k$ (propriété admise)

Sur un intervalle où f est **strictement monotone**, une valeur k comprise entre les images des bornes est atteinte **exactement une fois**. Cette propriété est **admise** : le programme de Première ne la démontre pas (sa justification est vue en Terminale). On s'en sert seulement pour **lire un tableau de variations**, comme on lirait une courbe, afin de **compter les solutions** d'une équation $f(x) = k$: on regarde, intervalle par intervalle, si k est atteint.

Exemple. Avec le tableau précédent ($f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(5) = 21$) :

- $k = 3$: la valeur 3 est comprise entre 1 et 5 sur $[0; 1]$ et sur $[1; 3]$, et entre 1 et 21 sur $[3; 5]$: **trois solutions** ;
- $k = 5$: atteinte en $x = 1$ (maximum local) et une fois sur $[3; 5]$: **deux solutions** ;
- $k = 30$: supérieure à 21, le maximum de f : **aucune solution**.

On peut le vérifier : $f(x) = 3 \iff (x - 2)(x^2 - 4x + 1) = 0$ donne $x = 2$ et $x = 2 \pm \sqrt{3}$, soit trois solutions de $[0; 5]$.

Piège : le tableau donne le **nombre** de solutions, pas leur **valeur**. Pour les calculer, on résout l'équation (factorisation, discriminant).

5. Fonction polynôme du second degré

Propriété. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa dérivée $f'(x) = 2ax + b = 2a \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ s'annule en $\alpha = -\frac{b}{2a}$ en changeant de signe, et le sens de variation dépend du **signe de a** :

- si $a > 0$: f décroît puis croît, la parabole est **tournée vers le haut**, et $f(\alpha)$ est un **minimum** ;
- si $a < 0$: f croît puis décroît, la parabole est **tournée vers le bas**, et $f(\alpha)$ est un **maximum**.

Cas $a > 0$

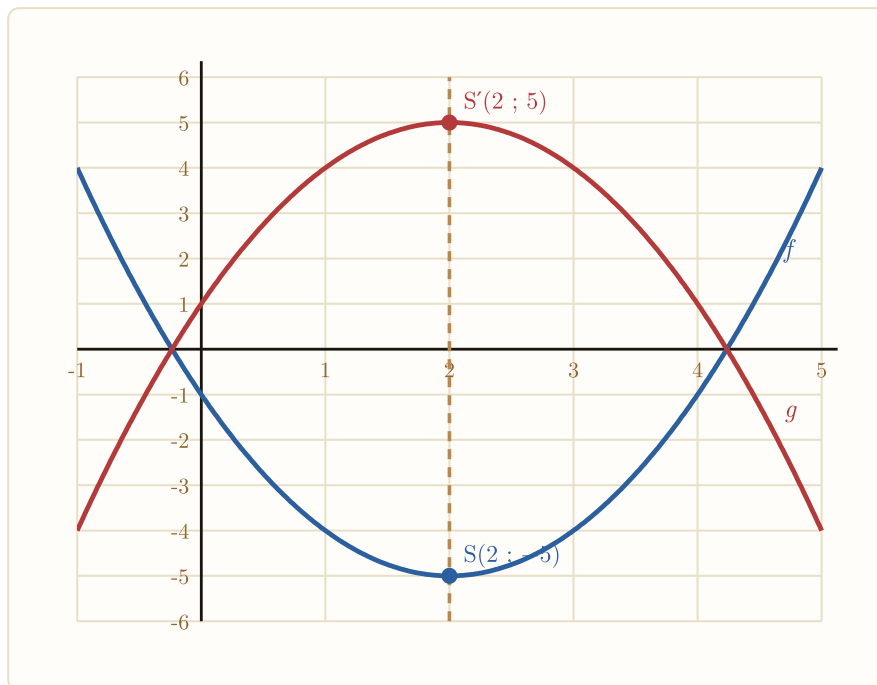
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Cas $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

L'extremum vaut $f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$, et le **sommet** de la parabole est le point $S(\alpha; f(\alpha))$, situé sur son axe de symétrie $x = \alpha$. C'est ce que dit la forme canonique du chapitre 1 : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\beta = f(\alpha)$.

Exemple. $f(x) = x^2 - 4x - 1$ a pour dérivée $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$: f est décroissante sur $] -\infty; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$, avec le minimum $f(2) = 4 - 8 - 1 = -5$. Pour $g(x) = -x^2 + 4x + 1$, $g'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2)$: g est croissante puis décroissante, avec le maximum $g(2) = -4 + 8 + 1 = 5$.



Deux paraboles de même axe $x = 2$: f tournée vers le haut ($a = 1$), g tournée vers le bas ($a = -1$)

Astuce. Pour un trinôme, le signe de a donne tout de suite l'allure (« sourire » ou « grimace »), et l'abscisse du sommet est $-\frac{b}{2a}$. Le tableau de variations s'écrit en deux lignes.

6. Exemple : polynômes de degré 3

Le programme ne donne pas de résultat général sur les polynômes de degré 3 : on les étudie **au cas par cas**, avec les cinq temps. Leur dérivée $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ est un **trinôme**, dont on sait lire le signe avec ses racines ou son discriminant Δ . Sur les exemples du chapitre, on observe :

- $\Delta > 0$: f' s'annule **deux fois** en changeant de signe : **deux extremums locaux** (un maximum et un minimum), la courbe fait un « S » ;
- $\Delta \leq 0$: f' garde un signe constant (elle s'annule au plus en un point, sans changer de signe) : f est **strictement monotone**, sans extremum.

Exemples. $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, deux extremums locaux. $g(x) = x^3 + x$: $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. Une fonction rationnelle et une inégalité

Étudions $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Pour $x > 0$, $x^2 > 0$ et $x+2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

f est strictement décroissante sur $]0; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$, donc **le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est $f(2) = 4$** . On en déduit l'inégalité :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad x + \frac{4}{x} \geq 4$$

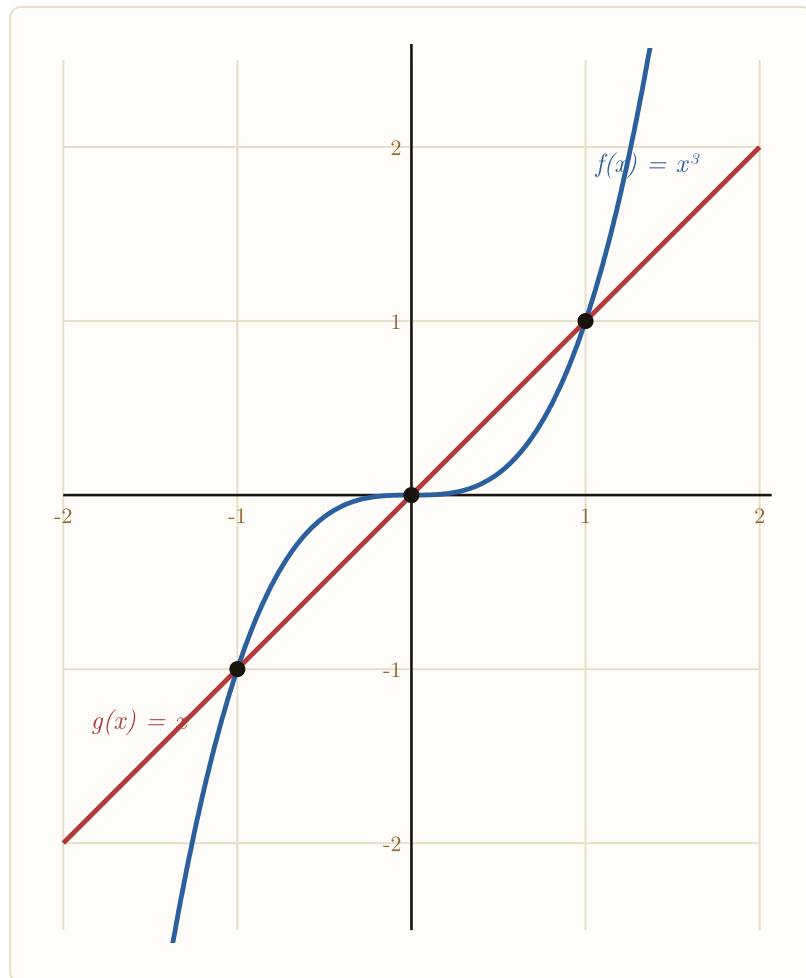
Démontrer une inégalité par les variations : on **cherche le minimum** de la différence ou de la fonction, et on montre qu'il est supérieur à la valeur voulue.

8. Position relative de deux courbes

Méthode. Pour savoir quelle courbe est au-dessus de l'autre, on étudie **le signe de la différence** $f(x) - g(x)$, que l'on **factorise** :

- $f(x) - g(x) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$;
- $f(x) - g(x) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** ;
- $f(x) - g(x) = 0$: les courbes **se coupent**.

Exemple 1. $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$. On factorise : $f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.



Position relative de x^3 et x : elles se coupent en $(-1 ; -1)$, $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) - g(x) < 0$ sur $] -\infty ; -1[$, positif sur $] -1 ; 0[$, négatif sur $] 0 ; 1[$ et positif sur $] 1 ; +\infty[$. Les courbes se coupent en $(-1 ; -1)$, $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$.

Exemple 2 : une courbe et sa tangente. $f(x) = x^3$ a pour tangente en 1 la droite $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$. On factorise :

$$f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x - 1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - (3x - 2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

La courbe est **au-dessous** de T pour $x < -2$ et **au-dessus** pour $x > -2$, avec $x \neq 1$. Elle **coupe** T en $x = -2$, et en $x = 1$ elle **touche** T (point de tangence) sans changer de côté, car le facteur $(x - 1)^2$ ne change pas de signe.

Astuce. Comparer deux courbes, c'est résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$: on se ramène au signe d'un produit de facteurs.

9. Fonctions paires et impaires

Définitions. Soit f définie sur un ensemble D symétrique par rapport à 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).

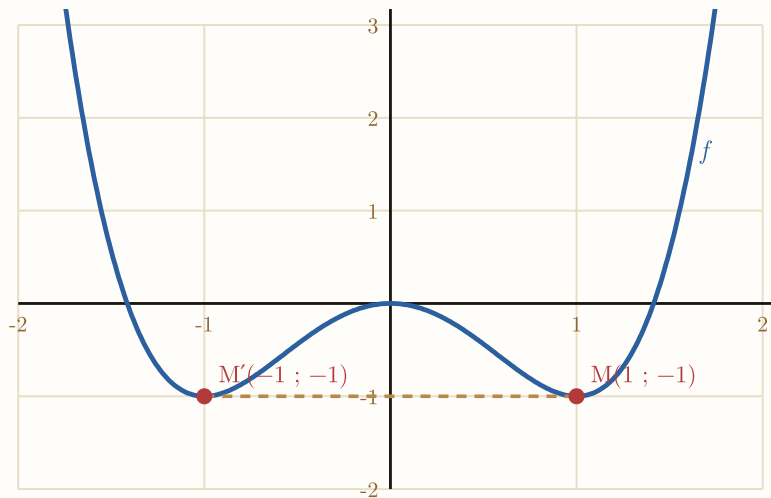
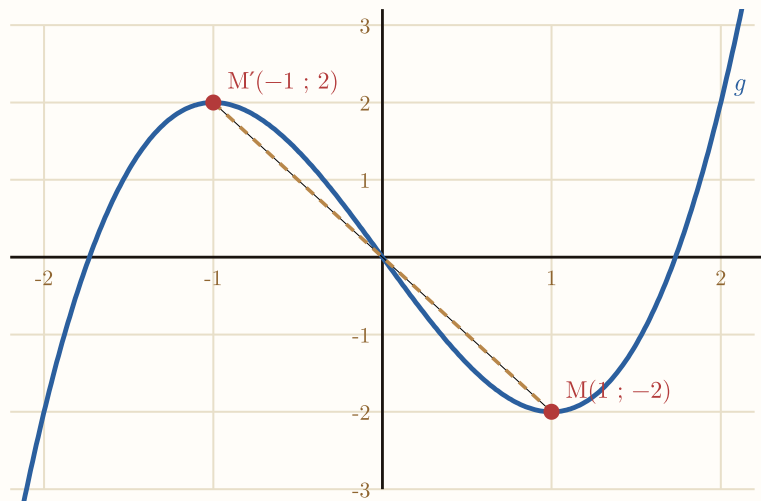
- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$;
- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$.

Traduction géométrique (repère orthogonal).

- f est paire $\iff \mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** : si $M(x; y)$ est sur la courbe, $M'(-x; y)$ y est aussi ;
- f est impaire $\iff \mathcal{C}_f$ est **symétrique par rapport à l'origine O** : si $M(x; y)$ est sur la courbe, $M'(-x; -y)$ y est aussi.

Exemples. Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont paires ; $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont impaires. La fonction $h(x) = x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire : $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$, qui n'est ni $h(1)$ ni $-h(1)$.

Méthode. On calcule $f(-x)$ et on compare avec $f(x)$ et $-f(x)$. Pour $f(x) = x^4 - 2x^2$: $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, donc f est **paire**. Pour $g(x) = x^3 - 3x$: $g(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$, donc g est **impaire**.


 $f(x) = x^4 - 2x^2$: courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

 $g(x) = x^3 - 3x$: courbe symétrique par rapport à l'origine

Conséquence pour les variations. Si f est paire ou impaire, on l'étudie sur $D \cap [0; +\infty[$, puis on déduit le reste par symétrie :

- f **paire** : les variations sur $] -\infty; 0]$ sont **contraires** à celles sur $[0; +\infty[$;
- f **impaire** : les variations sont **de même sens** de part et d'autre de 0.

Exemple. Pour $g(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$, on étudie $[0; 2]$: $g'(x) = 3(x-1)(x+1)$, $g(0) = 0$, $g(1) = -2$, $g(2) = 2$. Comme g est impaire, on complète avec $g(-1) = 2$ et $g(-2) = -2$, et le sens de variation est le même de chaque côté de 0 :

x	-2		-1		1		2
g	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Pièges :

- Le domaine doit être **symétrique** : $x \mapsto \sqrt{x}$ (définie sur $[0; +\infty[$) n'est ni paire ni impaire.
- Beaucoup de fonctions ne sont **ni paires ni impaires** : il suffit d'un exemple ($h(1)$ et $h(-1)$) pour le montrer, mais il faut calculer $f(-x)$ **pour tout** x pour prouver qu'elle l'est.

10. Problèmes d'optimisation**Méthode**

1. **Choisir la variable** x et préciser son **domaine** (ce que la situation autorise).
2. **Exprimer** la grandeur à optimiser en fonction de x .
3. **Étudier les variations** (dérivée factorisée, signe, tableau).
4. **Conclure en contexte** : valeur de x , valeur de la grandeur, **avec l'unité**.

Exemple : la boîte de volume maximal. On part d'une feuille carrée de **30** cm de côté.

On découpe un carré de côté x dans chaque coin et on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.

Quel x rend le volume maximal ?

La base est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur est x . Il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, donc $x \in]0; 15[$. Le volume, en cm^3 , est donné par la formule suivante, qui garde un sens en 0 et en 15 (boîte « plate » de volume nul) : on l'étudie donc sur $[0; 15]$.

$$V(x) = x(30 - 2x)^2$$

V est dérivable sur $[0; 15]$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x$ et $v(x) = (30 - 2x)^2$, on a $v'(x) = 2 \times (-2)(30 - 2x) = -4(30 - 2x)$, donc

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x) = 12(x - 15)(x - 5)$$

Sur $]0; 5[$, les deux facteurs $x - 15$ et $x - 5$ sont négatifs : $V' > 0$. Sur $]5; 15[$, $x - 15 < 0$ et $x - 5 > 0$: $V' < 0$.

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	2 000	↘	0

Conclusion : le volume est maximal pour $x = 5$ cm. La boîte a alors une base de 20 cm sur 20 cm, une hauteur de 5 cm, et un volume de 2 000 cm^3 .

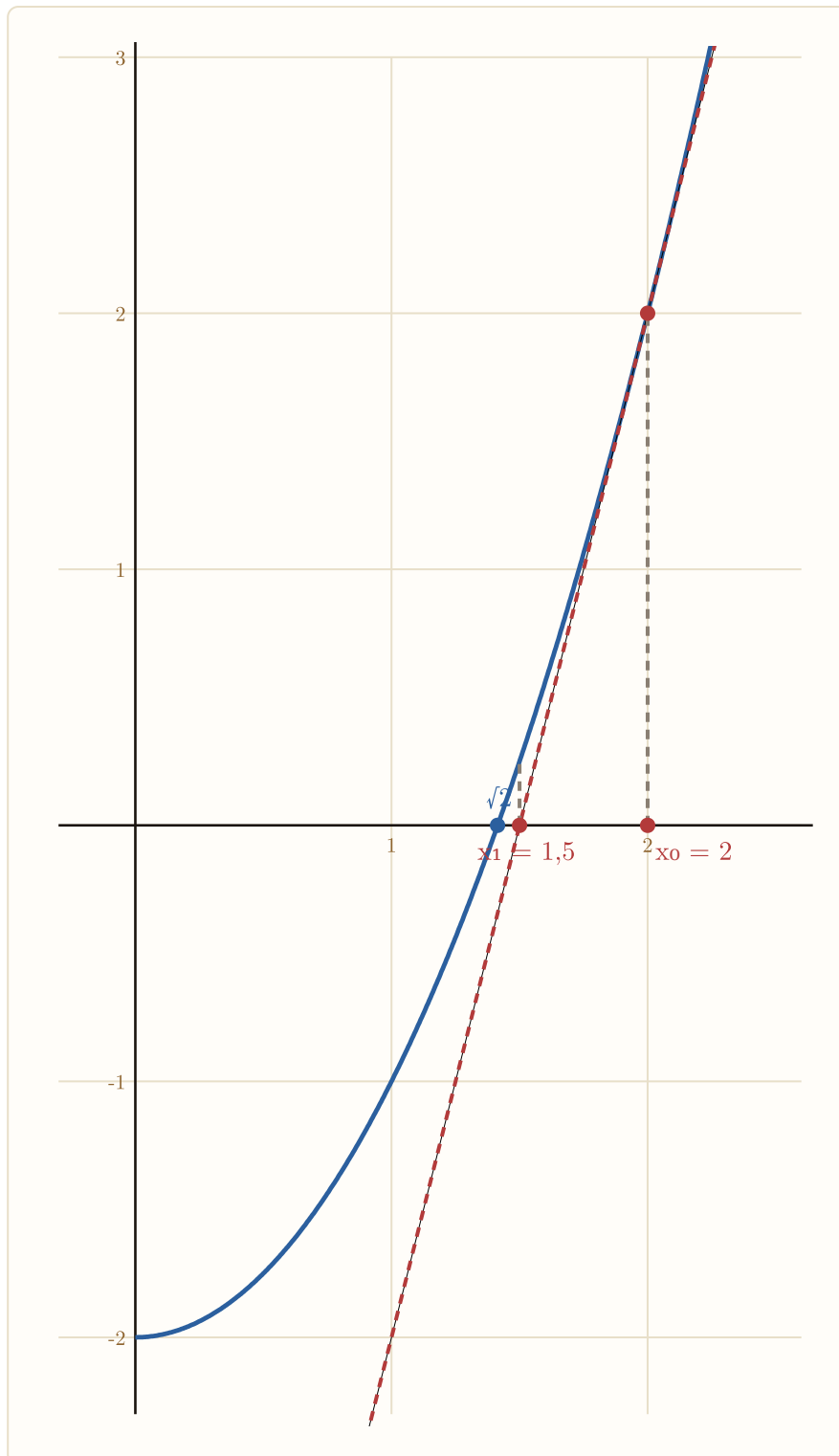
11. Python

```
def V(x):  
    return x * (30 - 2 * x) ** 2  
  
meilleur = 0  
x_opt = 0  
for k in range(0, 1501):  
    x = k / 100  
    if V(x) > meilleur:  
        meilleur = V(x)  
        x_opt = x  
print(x_opt, meilleur)
```

Le script teste tous les x de 0 à 15 par pas de 0,01 et garde le plus grand volume. Il affiche 5.0 2000.0 : il **confirme** le calcul, mais ne le remplace pas, car il ne teste qu'un nombre fini de valeurs.

12. Algorithme : méthode de Newton (cas favorables)

Pour trouver une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$, on part d'un point x_0 puis on remplace la courbe par sa **tangente** : l'abscisse où la tangente coupe l'axe des abscisses est une meilleure approximation.



Méthode de Newton : la tangente en x_0 coupe l'axe en x_1 , plus proche de $\sqrt{2}$

Formule de récurrence. La tangente en x_n a pour équation $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Elle coupe l'axe des abscisses quand $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, c'est-à-dire en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{si } f'(x_n) \neq 0)$$

Exemple. $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 2$. Ici $f'(x) = 2x$, donc $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$. La fonction Python ci-dessous renvoie la **liste** des termes $x_0, x_1, \dots, x_n$:

```
def newton(f, df, x0, n):
    termes = [x0]
    for _ in range(n):
        x = termes[-1]
        termes.append(x - f(x) / df(x))
    return termes

def f(x):
    return x**2 - 2

def df(x):
    return 2 * x

print(newton(f, df, 2, 4))
```

Le script affiche `[2, 1.5, 1.4166666666666667, 1.4142156862745099, 1.4142135623746899]`. On retrouve $\sqrt{2} \approx 1,41421356$: le nombre de décimales exactes double environ à chaque étape.

Cas favorables. La méthode donne de bons résultats quand f est dérivable, quand f' ne s'annule pas près de la solution cherchée et quand x_0 est **choisi assez près** de cette solution. Le programme se limite à ces cas favorables : on ne démontre pas la convergence.

Pièges :

- Si $f'(x_n) = 0$, la tangente est horizontale et la formule n'a plus de sens.
- Avec un mauvais x_0 , la méthode peut échouer. Pour $f(x) = x^3 - 2x + 2$ et $x_0 = 0$, on trouve $x_1 = 0 - \frac{2}{-2} = 1$ puis $x_2 = 1 - \frac{1}{1} = 0$: les termes valent $0, 1, 0, 1, \dots$ et ne se rapprochent d'aucune solution.

13. Les 12 pépites du chapitre

1. $f' \geq 0$ sur I : f croissante ; $f' \leq 0$: f décroissante.
2. On étudie le **signe de f'** , jamais celui de f .
3. **Cinq temps** : domaine, dérivée factorisée, signe, tableau (avec **les images**), conclusion.
4. **Extremum local** : f' s'annule **en changeant de signe**.
5. $f'(a) = 0$ **ne suffit pas** (exemple : x^3 en 0) ; en un extremum intérieur, la tangente est horizontale.
6. Un extremum local n'est pas toujours l'extremum **sur l'intervalle** : regarder aussi les bornes.
7. **Second degré** : sommet d'abscisse $-\frac{b}{2a}$, minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.
8. **Degré 3** : f' est un trinôme dont on lit le signe (racines, Δ).
9. **Position relative** : on factorise $f(x) - g(x)$ et on étudie son signe.
10. **Parité** : $f(-x) = f(x)$ donne une symétrie d'axe (Oy) ; $f(-x) = -f(x)$ donne une symétrie de centre O .
11. **Lecture d'un tableau** : on compte les solutions de $f(x) = k$ intervalle par intervalle (propriété admise).
12. **Optimisation** : variable et domaine, expression, variations, conclusion **avec l'unité**.

14. Ce qui peut tomber en contrôle

- **Étudier les variations** d'un polynôme ou d'un quotient et dresser le tableau (fiche 1).
- **Lire une courbe**, tracer une allure à partir d'un tableau, utiliser la **parité** (fiches 1 et 3).
- **Déterminer les extremums**, étudier un **trinôme** et résoudre un problème d'optimisation (fiche 2).
- Une **étude de fonction complète** : tableau, tangente, position relative (fiche 3).
- **Démontrer une inégalité** par les variations.
- **Appliquer la méthode de Newton** à la main et avec Python (fiche 3, synthèse).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices de synthèse, puis au Guide de rédaction du chapitre.