

Variations et courbes représentatives : exercices de synthèse

Quatre exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction polynôme de degré **3** : variations, extremums sur un intervalle, solution de $f(x) = 0$ avec Python, tangentes parallèles à une droite ;
- un problème d'optimisation : le grillage minimal pour un enclos d'aire fixée ;
- une courbe et une droite : position relative, point de tangence, nombre de solutions de $f(x) = k$.
- une fonction impaire : parité, variations, tangente, position relative et méthode de Newton avec Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- dérivée **factorisée** et signe **justifié** ;
- tableau de variations avec les **images** et comparaison avec les **bornes** ;
- problème d'optimisation : variable, domaine, expression, étude, **conclusion en contexte avec l'unité** ;
- nombre de solutions justifié **intervalle par intervalle**.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une étude de fonction, suis toujours les cinq temps : **domaine, dérivée, signe, tableau, conclusion**.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur l'intervalle $[-2; 3]$.

1. Montrer que $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$.
3. À l'aide du tableau de variations (lecture admise du cours), justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[-2; 3]$, puis, avec un script Python, en donner un encadrement d'amplitude 0,01.
4. Pour quelles valeurs de x la tangente à la courbe est-elle parallèle à la droite d'équation $y = -12x$? Écrire les équations de ces tangentes.

Exercice 2 : le grillage minimal

Un agriculteur veut construire un enclos rectangulaire d'aire 800 m^2 . On note x la largeur de l'enclos, en mètres. Le grillage coûte 12 € le mètre.

1. Exprimer la longueur de l'enclos en fonction de x , puis montrer que le périmètre est $P(x) = 2x + \frac{1600}{x}$ pour $x > 0$.
2. Calculer $P'(x)$ et montrer que $P'(x) = \frac{2(x^2 - 800)}{x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de P sur $]0; +\infty[$.
4. Quelles sont les dimensions de l'enclos qui minimisent la longueur de grillage ? Quel est alors le coût minimal du grillage ?

Exercice 3 : une courbe et une droite

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et d la droite d'équation $y = -2$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que $f(x) + 2 = (x-1)^2(x+2)$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d et les points communs.
3. Combien l'équation $f(x) = k$ a-t-elle de solutions dans $[-2; 2]$ pour $k = -3$, $k = 0$ et $k = 2$?

Exercice 4 : une fonction impaire et la méthode de Newton

Soit $f(x) = x^3 - 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que f est impaire. Quelle propriété de $\mathcal{C}_f$ en découle ?
2. Calculer $f'(x)$ et la factoriser. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$, puis, par parité, sur $[-4; 4]$. Donner les extremums locaux.
3. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 , puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
4. Résoudre $f(x) = 0$ et donner la solution positive. Pour l'approcher, on applique la méthode de Newton à f avec $x_0 = 3$: calculer x_1 (fraction) puis x_2 (valeur approchée à 10^{-5} près) et comparer avec la solution. Compléter la fonction Python `newton(f, df, x0, n)` du cours pour afficher les premiers termes.