

Variations et courbes représentatives : exercices de synthèse

Quatre exercices complets, au format d'un devoir :

- une fonction polynôme de degré **3** : variations, extremums sur un intervalle, solution de $f(x) = 0$ avec Python, tangentes parallèles à une droite ;
- un problème d'optimisation : le grillage minimal pour un enclos d'aire fixée ;
- une courbe et une droite : position relative, point de tangence, nombre de solutions de $f(x) = k$.
- une fonction impaire : parité, variations, tangente, position relative et méthode de Newton avec Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- dérivée **factorisée** et signe **justifié** ;
- tableau de variations avec les **images** et comparaison avec les **bornes** ;
- problème d'optimisation : variable, domaine, expression, étude, **conclusion en contexte avec l'unité** ;
- nombre de solutions justifié **intervalle par intervalle**.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour une étude de fonction, suis toujours les cinq temps : **domaine, dérivée, signe, tableau, conclusion**.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur l'intervalle $[-2; 3]$.

1. Montrer que $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$.
3. À l'aide du tableau de variations (lecture admise du cours), justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[-2; 3]$, puis, avec un script Python, en donner un encadrement d'amplitude 0,01.
4. Pour quelles valeurs de x la tangente à la courbe est-elle parallèle à la droite d'équation $y = -12x$? Écrire les équations de ces tangentes.

Correction de la question 1

f est un polynôme, dérivable sur $[-2; 3]$ et $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racines -1 et 2 (car $-1 + 2 = 1$ et $-1 \times 2 = -2$), donc $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

$$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$$

Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, négatif entre elles. On calcule $f(-2) = -16 - 12 + 24 + 5 = 1$, $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$, $f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$ et $f(3) = 54 - 27 - 36 + 5 = -4$.

x	-2		-1		2		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	12	↘	-15	↗	-4

f est strictement croissante sur $[-2; -1]$, strictement décroissante sur $[-1; 2]$, strictement croissante sur $[2; 3]$.

Correction de la question 2

Les extremums locaux sont $f(-1) = 12$ (maximum local) et $f(2) = -15$ (minimum local).

Les valeurs aux bornes sont $f(-2) = 1$ et $f(3) = -4$, comprises entre -15 et 12 .

Le maximum de f sur $[-2; 3]$ est 12 (en $x = -1$) et son minimum est -15 (en $x = 2$).

Correction de la question 3

Sur $[-2; -1]$, f est strictement croissante de 1 à 12 : $f(x) \geq 1 > 0$, pas de solution.

Sur $[-1; 2]$, f est strictement décroissante de 12 à -15 : 0 est atteint **une seule fois** (lecture admise du tableau).

Sur $[2; 3]$, f est strictement croissante de -15 à -4 : $f(x) \leq -4 < 0$, pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in [-1; 2]$.

Avec $f(0) = 5 > 0$ et $f(1) = 2 - 3 - 12 + 5 = -8 < 0$, on a $\alpha \in]0; 1[$. On balaie avec un pas de 0,01 :

```
def f(x):
    return 2 * x**3 - 3 * x**2 - 12 * x + 5

k = 0
while f(k / 100) > 0:
    k = k + 1
print(k / 100)
```

Le script affiche **0.39** : $k = 39$ est le premier entier pour lequel $f(k/100) \leq 0$.

Vérification : $f(0,38) \approx 0,117 > 0$ et $f(0,39) \approx -0,018 < 0$.

$0,38 < \alpha < 0,39$

Correction de la question 4

Une tangente parallèle à la droite $y = -12x$ a pour coefficient directeur -12 : on résout $f'(x) = -12$.

$6x^2 - 6x - 12 = -12 \iff 6x^2 - 6x = 0 \iff 6x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux sont dans $[-2; 3]$.

En $x = 0$: $f(0) = 5$, tangente $y = -12(x - 0) + 5 = -12x + 5$.

En $x = 1$: $f(1) = -8$, tangente $y = -12(x - 1) - 8 = -12x + 4$.

Les deux tangentes ont pour équations $y = -12x + 5$ et $y = -12x + 4$.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : dérivée **développée puis factorisée**, signe justifié (racines, signe de a), tableau avec les **quatre images**.
- **Q2** : comparaison des extremums locaux avec les **valeurs aux bornes**.

- **Q3** : raisonnement **intervalle par intervalle** pour l'unicité de la solution, script avec condition de boucle correcte, **encadrement vérifié** par deux valeurs.
- **Q4** : équation $f'(x) = -12$ résolue, **deux** tangentes écrites en trois temps.

Exercice 2 : le grillage minimal

Un agriculteur veut construire un enclos rectangulaire d'aire 800 m^2 . On note x la largeur de l'enclos, en mètres. Le grillage coûte **12 €** le mètre.

1. Exprimer la longueur de l'enclos en fonction de x , puis montrer que le périmètre est $P(x) = 2x + \frac{1600}{x}$ pour $x > 0$.
2. Calculer $P'(x)$ et montrer que $P'(x) = \frac{2(x^2 - 800)}{x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de P sur $]0; +\infty[$.
4. Quelles sont les dimensions de l'enclos qui minimisent la longueur de grillage ? Quel est alors le coût minimal du grillage ?

Correction de la question 1

L'aire vaut 800 m^2 : si la largeur est x , la longueur est $L = \frac{800}{x}$ (avec $x > 0$).

Le périmètre est $P(x) = 2(x + L) = 2\left(x + \frac{800}{x}\right)$.

$$P(x) = 2x + \frac{1600}{x} \text{ pour } x > 0$$

Correction de la question 2

P est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $P'(x) = 2 - \frac{1600}{x^2}$.

On met au même dénominateur : $P'(x) = \frac{2x^2 - 1600}{x^2} = \frac{2(x^2 - 800)}{x^2}$.

$$P'(x) = \frac{2(x^2 - 800)}{x^2}$$

Correction de la question 3

Pour $x > 0$, $x^2 > 0$: $P'(x)$ est du signe de $x^2 - 800$, qui s'annule en $x = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ (car $800 = 400 \times 2$).

Pour $0 < x < 20\sqrt{2}$, $x^2 < 800$ donc $P' < 0$; pour $x > 20\sqrt{2}$, $P' > 0$.

$$P(20\sqrt{2}) = 40\sqrt{2} + \frac{1\,600}{20\sqrt{2}} = 40\sqrt{2} + \frac{80}{\sqrt{2}} = 40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 80\sqrt{2}.$$

x	0		$20\sqrt{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		-	0	+	
$P(x)$		$\searrow$	$80\sqrt{2}$	$\nearrow$	

P est strictement décroissante sur $]0; 20\sqrt{2}]$ et strictement croissante sur $[20\sqrt{2}; +\infty[$.

Correction de la question 4

Le périmètre est minimal pour $x = 20\sqrt{2} \approx 28,28$ m. La longueur vaut alors $\frac{800}{20\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ m : l'enclos est un carré.

Le périmètre minimal est $80\sqrt{2} \approx 113,14$ m, soit un coût de $12 \times 80\sqrt{2} \approx 1\,357,65$ €.

Le grillage est minimal pour un enclos carré de côté $20\sqrt{2} \approx 28,28$ m : il faut environ 113,14 m de grillage, pour un coût minimal d'environ 1 358 €.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : variable et domaine précisés, contrainte d'aire utilisée pour éliminer la longueur.
- **Q2** : dérivée calculée, mise au même dénominateur, forme factorisée ou signe de $x^2 - 800$ justifié.
- **Q3** : tableau avec la valeur exacte $80\sqrt{2}$ du minimum.
- **Q4** : dimensions, périmètre minimal et coût, avec l'unité ; remarque sur le carré.

Exercice 3 : une courbe et une droite

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et d la droite d'équation $y = -2$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que $f(x) + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d et les points communs.
3. Combien l'équation $f(x) = k$ a-t-elle de solutions dans $[-2; 2]$ pour $k = -3$, $k = 0$ et $k = 2$?

Correction de la question 1

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$: négative entre -1 et 1 , positive à l'extérieur.

$f(-2) = -8 + 6 = -2$, $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 3 = -2$, $f(2) = 8 - 6 = 2$.

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

f est croissante sur $[-2; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$, croissante sur $[1; 2]$.

Correction de la question 2

$(x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2 = f(x) + 2$.

Sur $[-2; 2]$, $x + 2 \geq 0$ et $(x - 1)^2 \geq 0$: le produit est positif ou nul, donc $f(x) \geq -2$.

Il s'annule si $x = -2$ ou $x = 1$.

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de d sur $[-2; 2]$, avec deux points communs : $(-2; -2)$ et $(1; -2)$.

En $(1; -2)$, $f'(1) = 0$: la droite d est la **tangente** à la courbe, au point où f atteint son minimum local.

Correction de la question 3

$k = -3$: -3 est inférieur au minimum de f sur $[-2; 2]$ (qui est -2).

$f(x) = -3$ n'a aucune solution.

$k = 0$: 0 est atteint une fois sur chaque intervalle $(-2 \rightarrow 2, 2 \rightarrow -2, -2 \rightarrow 2)$.

$f(x) = 0$ a 3 solutions ($x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$, car $f(x) = x(x^2 - 3)$).

$k = 2$: 2 est atteint au maximum local en $x = -1$ et à la borne $x = 2$, et nulle part ailleurs.

$f(x) = 2$ a 2 solutions ($x = -1$ et $x = 2$, car $f(x) - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$).

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : dérivée factorisée, signe justifié, tableau avec **quatre images**.
- **Q2** : différence **développée pour vérifier** la factorisation, signe d'un produit justifié, **points communs** et lien avec la tangente.
- **Q3** : raisonnement **intervalle par intervalle** pour chaque valeur de k , **vérification algébrique** quand elle est possible.

Exercice 4 : une fonction impaire et la méthode de Newton

Soit $f(x) = x^3 - 6x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que f est impaire. Quelle propriété de $\mathcal{C}_f$ en découle ?
2. Calculer $f'(x)$ et la factoriser. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$, puis, par parité, sur $[-4; 4]$. Donner les extremums locaux.
3. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
4. Résoudre $f(x) = 0$ et donner la solution positive. Pour l'approcher, on applique la méthode de Newton à f avec $x_0 = 3$: calculer x_1 (fraction) puis x_2 (valeur approchée à 10^{-5} près) et comparer avec la solution. Compléter la fonction Python `newton(f, df, x0, n)` du cours pour afficher les premiers termes.

Correction de la question 1

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x = -f(x)$.

f est impaire : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O .

Correction de la question 2

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Sur $[0; 4]$, $x + \sqrt{2} > 0$: f' est du signe de $x - \sqrt{2}$. $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ et $f(4) = 64 - 24 = 40$.

x	0		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	40

f étant impaire, le sens de variation est le même de chaque côté de 0 : $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ et $f(-4) = -40$.

x	-4		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	-40	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	40

$f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ est un maximum local et $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ est un minimum local.

Correction de la question 3

$f(0) = 0$ et $f'(0) = -6$: $T : y = -6x$. On étudie $f(x) - (-6x) = x^3 - 6x + 6x = x^3$.

$x^3 > 0$ pour $x > 0$ et $x^3 < 0$ pour $x < 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $]0; +\infty[$, au-dessous sur $] -\infty; 0[$, et elle traverse T en O .

Correction de la question 4

$f(x) = x(x^2 - 6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{6}$: la solution positive est $\sqrt{6} \approx 2,44949$.

$f'(x) = 3x^2 - 6$ donc $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6x_n}{3x_n^2 - 6}$. $x_1 = 3 - \frac{27 - 18}{27 - 6} = 3 - \frac{9}{21} = \frac{18}{7}$ et $x_2 = \frac{18}{7} - \frac{f(18/7)}{f'(18/7)} = \frac{1944}{791} \approx 2,45765$.

On complète la fonction du cours en passant f et df :

```
f = lambda x: x**3 - 6 * x
df = lambda x: 3 * x**2 - 6
print(newton(f, df, 3, 3))
```

Le script affiche des valeurs qui se stabilisent : $x_3 \approx 2,44953$. Ici f' ne s'annule pas sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ et $x_0 = 3$ est proche de la solution : c'est un cas favorable.

$x_1 = \frac{18}{7}$, $x_2 \approx 2,45765$, $x_3 \approx 2,44953$: les termes approchent $\sqrt{6} \approx 2,44949$.

Points clés attendus pour l'exercice 4

- **Q1** : domaine symétrique, calcul de $f(-x)$ pour tout x , **interprétation géométrique**.
- **Q2** : dérivée factorisée avec $\sqrt{2}$, tableau sur $[0; 4]$ **puis** déduction par parité, extremums locaux.
- **Q3** : équation de la tangente en trois temps, **différence factorisée** et signe.
- **Q4** : solution exacte, formule de Newton écrite, **valeurs calculées**, commentaire sur le cas favorable.