

Guide de rédaction : variations et courbes représentatives

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Variations et courbes représentatives, **les dix-sept situations qui reviennent en contrôle** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, la rédaction consiste surtout à **justifier le signe de la dérivée**, à **dresser le tableau avec ses images** et à **conclure en contexte**.

Le principe du chapitre

Dans une étude de fonction, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- le **domaine** et la **dérivabilité** justifiés ;
- la dérivée **factorisée** ;
- le **signe de f' justifié** (racines, signe de a , signe des facteurs) ;
- le **tableau de variations** avec les **images** ;
- la **conclusion** : variations, extremums, et en contexte l'unité.

1. Les dix-sept situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : étudier le signe d'une dérivée du second degré.

« $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$.

Le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour racines -1 et 3 et un coefficient $a = 1 > 0$: il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

Donc $f' > 0$ sur $] -\infty ; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1 ; 3[$ et $f' > 0$ sur $]3 ; +\infty[$. »

Situation 2 : dresser un tableau de variations.

« Voir le tableau : f est strictement croissante sur $[-2 ; -1]$, strictement décroissante sur $[-1 ; 3]$, strictement croissante sur $[3 ; 4]$, avec $f(-2) = 0$, $f(-1) = 7$, $f(3) = -25$ et $f(4) = -18$. »

Écris les **images**, pas seulement les flèches.

Situation 3 : montrer qu'une fonction est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

« $f'(x) = 3x^2 + 3$. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 3 > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. »

Situation 4 : trouver les extremums locaux.

« f' s'annule en -1 en passant de $+$ à $-$: $f(-1) = 7$ est un maximum local. f' s'annule en 3 en passant de $-$ à $+$: $f(3) = -25$ est un minimum local. »

Situation 5 : montrer que $f'(a) = 0$ ne donne pas d'extremum.

« $g'(x) = 3(x-1)^2$ s'annule en 1 mais reste positive de part et d'autre : g' ne change pas de signe. Donc g n'a pas d'extremum en 1 . »

Situation 6 : donner l'extremum sur un intervalle fermé.

« Les extremums locaux sont $f(-1) = 7$ et $f(3) = -25$. Les valeurs aux bornes sont $f(-2) = 0$ et $f(4) = -18$. Donc le maximum de f sur $[-2; 4]$ est 7 et son minimum est -25 . »

Compare toujours avec les bornes.

Situation 7 : lire le nombre de solutions de $f(x) = k$ dans un tableau (propriété admise).

« Sur $[0; 1]$, f croît de 1 à 5 ; sur $[1; 3]$, elle décroît de 5 à 1 ; sur $[3; 5]$, elle croît de 1 à 21 . La valeur 3 est atteinte une fois sur chaque intervalle : l'équation $f(x) = 3$ a 3 solutions. »

Situation 8 : résoudre $f(x) = 0$ avec une racine évidente.

« $f(-2) = 0$, donc $f(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 1)$. Le discriminant de $x^2 - 5x + 1$ vaut 21 . Les solutions sont -2 et $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. »

Situation 9 : étudier la position d'une courbe par rapport à une droite.

« $f(x) - (-2) = (x-1)^2(x+2)$. Sur $[-2; 2]$, $x+2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq -2$. La courbe est au-dessus de la droite, avec deux points communs, en $x = -2$ et en $x = 1$. »

On **factorise** la différence : c'est ce qui rend le signe lisible.

Situation 10 : démontrer une inégalité par les variations.

« $f(x) = x + \frac{9}{x}$ est décroissante sur $]0; 3]$ et croissante sur $[3; +\infty[$. Son minimum est $f(3) = 6$. Donc, pour tout $x > 0$, $x + \frac{9}{x} \geq 6$. »

Situation 11 : déterminer des paramètres avec un extremum.

« $f'(x) = 3ax^2 + b$. Un extremum en 1 impose $f'(1) = 0$, soit $3a + b = 0$. De plus $f(1) = -2$, soit $a + b = -2$. On obtient $a = 1$ et $b = -3$. »

Vérifie avec les valeurs trouvées que f' change bien de signe.

Situation 12 : résoudre un problème d'optimisation.

« Soit x le côté découpé, en cm. Les longueurs sont strictement positives : $x \in]0; 7,5[$; on étudie la formule de V sur $[0; 7,5]$ (boîte plate aux bornes). Le volume est $V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x)$ et $V'(x) = 12(x - 3)(x - 10)$. Le volume est maximal pour $x = 3$ cm : il vaut 486 cm^3 . »

Conclus avec x , la grandeur et l'unité.

Situation 13 : dériver un quotient et justifier son signe.

« $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Le dénominateur est strictement positif : f' est du signe de $1 - x^2$, positif entre -1 et 1 . »

Situation 14 : interpréter un extremum.

« Le coût moyen M est minimal pour $q = 20$ objets : il vaut alors 30 € par objet. »

Écris une **phrase**, avec la quantité et l'unité.

Situation 15 : montrer qu'une fonction est paire ou impaire.

« Le domaine $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$ pour tout x : f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. »

Vérifie d'abord que le domaine est symétrique, puis calcule $f(-x)$ pour tout x .

Situation 16 : étudier un trinôme.

« $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ avec $a = 2 > 0$: f décroît puis croît. $f'(x) = 4x - 8 = 4(x - 2)$. Le minimum est $f(2) = -5$, atteint en $x = 2$. Le sommet de la parabole est $S(2; -5)$. »

Situation 17 : appliquer la méthode de Newton.

« $f(x) = x^2 - 3$ et $f'(x) = 2x$, donc $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$. Avec $x_0 = 2$: $x_1 = \frac{7}{4}$ puis $x_2 = \frac{97}{56} \approx 1,7321$. »

Vérifie que $f'(x_n) \neq 0$ et que x_0 est proche de la solution (cas favorable).

2. Avant / après sur les variations

a) Le signe de la dérivée.

« $f(x) > 0$ donc f est croissante. »

« $f'(x) > 0$ sur I , donc f est strictement croissante sur I . »

La première étudie le signe de f , pas celui de f' .

b) Un extremum.

« $f'(a) = 0$ donc f a un extremum en a . »

« f' s'annule en a en passant de $+$ à $-$, donc $f(a)$ est un maximum local. »

La première est fausse pour $f(x) = x^3$ en 0.

c) Un tableau de variations.

Un tableau avec seulement des flèches $\nearrow$ et $\searrow$.

Un tableau avec les **images** : $f(-2) = 0$, $f(-1) = 7$, $f(3) = -25$, $f(4) = -18$.

Sans les images, on ne peut ni lire un extremum ni compter les solutions.

d) Une conclusion d'optimisation.

« $x = 3$. »

« Le volume est maximal pour $x = 3$ cm : la boîte mesure 18 cm sur 9 cm sur 3 cm et son volume est 486 cm³. »

La première ne dit ni ce que x représente, ni la valeur optimale, ni l'unité.

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Étudier le signe de f au lieu de celui de f' .
- Conclure à un extremum parce que $f'(a) = 0$, **sans changement de signe**.
- Oublier les **images** dans le tableau de variations.
- Donner le maximum **local** sans le comparer aux **bornes**.
- Compter les solutions de $f(x) = k$ **sans regarder chaque intervalle**.
- Garder une solution **hors du domaine** d'un problème d'optimisation.
- Conclure un problème **sans unité** ni phrase.
- Conclure à la parité d'une fonction **sans vérifier** que le domaine est symétrique.
- Appliquer la méthode de Newton **sans vérifier** que $f'(x_n) \neq 0$.

4. La check-list du chapitre

- J'ai précisé le **domaine** et justifié la **dérivabilité**.
- J'ai **factorisé** la dérivée et **justifié son signe**.
- J'ai écrit les **images** dans le tableau de variations.
- Pour un extremum, j'ai vérifié que **f' change de signe** et comparé avec les **bornes**.
- Pour $f(x) = k$, j'ai raisonné **intervalle par intervalle**.
- Pour un problème, j'ai nommé la variable, vérifié le **domaine** et conclu avec l'**unité**.
- Pour la parité, j'ai vérifié le **domaine** puis calculé $f(-x)$.

Un tableau de variations sans images, c'est une carte routière sans noms de villes : on voit que ça monte et que ça descend, mais on ne sait pas où.