

Variations et courbes représentatives

Fiche Standard

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Un quotient sur un intervalle fermé

Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$ dans $[0; 5]$. Retrouver le nombre de solutions à l'aide du tableau.
3. Combien l'équation $f(x) = 4$ a-t-elle de solutions dans $[0; 5]$? Les déterminer.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) \geq 2$: d'abord avec le tableau, puis par un calcul direct sans dérivée.

Exercice S2 : Aquarium de surface minimale

On veut construire un aquarium sans couvercle, en forme de pavé droit à base carrée, de volume 32 dm^3 . On note x le côté de la base et h la hauteur, en décimètres. On souhaite minimiser la surface de verre S (le fond et les quatre faces latérales).

1. Exprimer h en fonction de x , puis montrer que $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $S'(x) = \frac{2(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{x^2}$, puis étudier le signe de S' sur $]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de S et conclure : dimensions de l'aquarium et surface minimale.
4. On exécute le programme suivant.

```
def S(x):
    return x ** 2 + 128 / x
```

```
best = S(1)
xbest = 1
for k in range(100, 1001):
    x = k / 100
    if S(x) < best:
        best = S(x)
        xbest = x
print(xbest, best)
```

Quelles valeurs de x sont testées? Quel affichage obtient-on? En quoi cela ne remplace-t-il pas l'étude de la question 3?

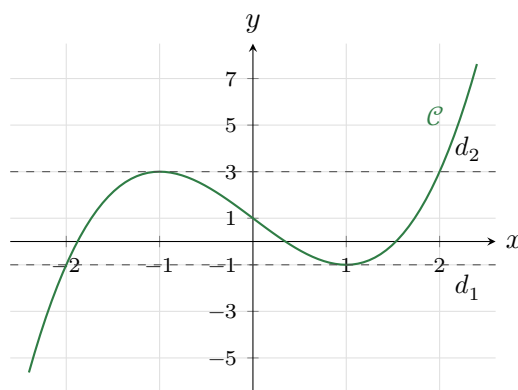
Exercice S3 : Déterminer une fonction à partir de sa courbe

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des réels. Sa courbe $\mathcal{C}$ passe par $A(0; 5)$ et admet au point B d'abscisse 2 une tangente horizontale. On sait de plus que $f(2) = -23$.

1. Déterminer c , puis montrer que $4a + b = -12$ et $2a + b = -18$. En déduire a et b .
2. On prend désormais $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$. Montrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-2)$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans limites).
3. Le point B correspond-il à un extremum local? Justifier. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions dans $[-6; 6]$.

Exercice S4 : Une courbe et ses tangentes horizontales

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe, d_1 la droite d'équation $y = -1$ et d_2 la droite d'équation $y = 3$.



1. Calculer $f'(x)$, la factoriser et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (sans limites).
2. Montrer que $f(x) + 1 = (x - 1)^2(x + 2)$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et d_1 , et leurs points communs.
3. Montrer de même que $f(x) - 3 = (x + 1)^2(x - 2)$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et d_2 .
4. En déduire que, pour tout $x \in [-2; 2]$, $-1 \leq f(x) \leq 3$.

Exercice S5 : Encadrer une solution avec Python

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]1; 2[$.
3. On considère le programme suivant.

```
def f(x):
    return x ** 3 + x - 3

k = 100
while f(k / 100) < 0:
    k = k + 1
print((k - 1) / 100, k / 100)
```

Expliquer ce que fait ce programme et pourquoi la boucle s'arrête. Quel affichage obtient-on ? Quel encadrement de α en déduit-on ?

4. Quelles lignes modifier pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,001 ? Que s'affiche-t-il alors ?

Exercice S6 : Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend des objets. Pour une production de q centaines d'objets ($0 \leq q \leq 8$), on modélise la recette par $R(q) = 40q$ et le coût de production par $C(q) = 2q^3 - 18q^2 + 70q + 20$, ces deux grandeurs étant exprimées en milliers d'euros. On note $B(q) = R(q) - C(q)$ le bénéfice.

1. Montrer que $B(q) = -2q^3 + 18q^2 - 30q - 20$ et que $B'(q) = -6(q - 1)(q - 5)$.
2. Dresser le tableau de variations de B sur $[0; 8]$.
3. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors son montant ?
4. Montrer que l'équation $B(q) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $[0; 8]$, avec $3 < \alpha < 4$ et $6 < \beta < 7$.
5. La calculatrice donne $\alpha \approx 3,083$ et $\beta \approx 6,422$. Pour quels nombres d'objets produits l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice strictement positif ?

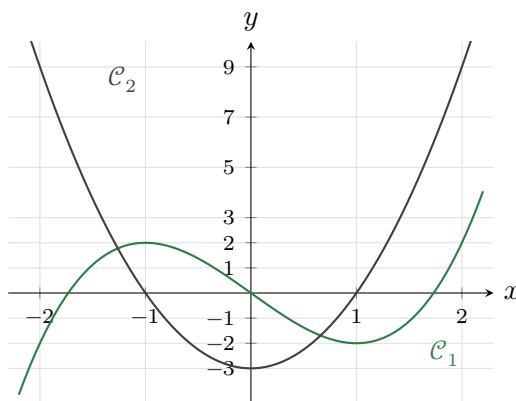
Exercice S7 : Démontrer des inégalités

1. Soit $g(x) = (1 + x)^3 - 1 - 3x$ sur $[-1; +\infty[$. Développer $(1 + x)^3$ pour écrire $g(x)$ sous forme d'un polynôme, puis montrer que $g'(x) = 3x(x + 2)$; étudier les variations de g et en déduire que $(1 + x)^3 \geq 1 + 3x$ pour tout $x \geq -1$. Que dire de $1,02^3$ par rapport à $1,06$?

- Soit $h(x) = x^4 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $h'(x) = 4(x-1)(x^2+x+1)$ et justifier que $x^2+x+1 > 0$ pour tout réel x . En déduire que $x^4 + 3 \geq 4x$ pour tout réel x .
- Soient a et b deux réels, avec $b > 0$. En appliquant le résultat précédent à $x = \frac{a}{b}$, montrer que $a^4 + 3b^4 \geq 4ab^3$.

Exercice S8 : Quelle est la courbe de la dérivée ?

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ci-dessous représentent, dans un ordre à déterminer, une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' .



- Montrer que $\mathcal{C}_2$ est la courbe de f' . (Raisonnement par l'absurde : supposer que $\mathcal{C}_1$ est celle de f' et regarder ce qui se passe en 0.)
- Par lecture du signe de f' , dresser le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$, en lisant sur le graphique les valeurs de f nécessaires.
- Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant avec le graphique :
 - $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1; 1]$;
 - f est croissante sur $[1; 2]$;
 - la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 2 a une pente supérieure à 5;
 - l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions dans $[-2; 2]$.

Exercice S9 : Nombre de solutions selon un paramètre

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ sur $[0; 3]$.

- Montrer que $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ et dresser le tableau de variations de f .
- Vérifier que $f(x) - 4 = (x-2)^2(2x-1)$ et que $f(x) - 5 = (x-1)^2(2x-5)$. En déduire les solutions des équations $f(x) = 4$ et $f(x) = 5$ dans $[0; 3]$.
- Discuter, selon les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $[0; 3]$.

Exercice S10 : Coût moyen minimal

Pour q milliers d'objets fabriqués ($1 \leq q \leq 10$), le coût total, en milliers d'euros, est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 100$. Le coût moyen, en euros par objet, est $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- Vérifier que $C_M(q) = q^2 - 6q + 20 + \frac{100}{q}$ et montrer que $C'_M(q) = \frac{2(q-5)(q^2+2q+10)}{q^2}$, puis étudier le signe de C'_M .
- Dresser le tableau de variations de C_M . Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce minimum ?
- Comparer le coût marginal $C'(5)$ et $C_M(5)$. Montrer que $C'_M(q) = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$, puis que $C'_M(a) = 0$ entraîne $C'(a) = C_M(a)$.
- Chaque objet est vendu 40 euros. Montrer que $C_M(q) = 40$ a exactement deux solutions $\alpha < \beta$ dans $[1; 10]$, avec $3 < \alpha < 4$ et $6 < \beta < 7$. Pour quelles productions le prix couvre-t-il le coût moyen ?