

Corrigé : Variations et courbes représentatives**Fiche Standard****S1.**

1. f est dérivable sur $[0; 5]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur $x + 1$ ne s'annule pas. Avec $u(x) = x^2 + 3$ et $v(x) = x + 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2},$$

car 1 et -3 sont racines de x^2+2x-3 (somme -2 , produit -3). Sur $[0; 5]$, $x+3 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-1$. Images : $f(0) = 3$, $f(1) = \frac{4}{2} = 2$, $f(5) = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$.

x	0	1	5
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	3	2	$\frac{14}{3}$

2. Pour $x \geq 0$, $x+1 > 0$ et $f(x) = 3 \iff x^2+3 = 3(x+1) \iff x^2-3x = 0 \iff x(x-3) = 0$.
Conclusion : les solutions sont 0 et 3, toutes deux dans $[0; 5]$.
 Avec le tableau : sur $[0; 1]$, f décroît de 3 à 2 et ne vaut 3 qu'en $x = 0$; sur $[1; 5]$, f croît de 2 à $\frac{14}{3} \approx 4,67$ et $3 \in]2; \frac{14}{3}[$ donne une unique solution, qui est 3. Soit bien 2 solutions.
3. Sur $[0; 1]$, f prend ses valeurs dans $[2; 3]$: 4 n'est pas atteint. Sur $[1; 5]$, f est strictement croissante de 2 à $\frac{14}{3}$ et $4 \in]2; \frac{14}{3}[$: une solution. Pour la déterminer : $f(x) = 4 \iff x^2+3 = 4x+4 \iff x^2-4x-1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 16+4 = 20$, les racines sont $2-\sqrt{5} < 0$ et $2+\sqrt{5} \approx 4,24 \in [1; 5]$.
Conclusion : l'équation $f(x) = 4$ a une seule solution dans $[0; 5]$, à savoir $2+\sqrt{5}$.
4. D'après le tableau, le minimum de f sur $[0; 5]$ est $f(1) = 2$, donc $f(x) \geq 2$. Par le calcul : comme $x+1 > 0$, $f(x) \geq 2 \iff x^2+3 \geq 2(x+1) \iff x^2-2x+1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0$, ce qui est vrai.
Conclusion : pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

S2.

1. Le volume vaut $x^2h = 32$, donc $h = \frac{32}{x^2}$. La surface est celle du fond (x^2) et des quatre faces latérales (4 rectangles $x \times h$) :

$$S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}, \quad x > 0.$$

2. S est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2} = \frac{2(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2},$$

car $x^3 - 64 = (x-4)(x^2+4x+16)$. Le trinôme $x^2+4x+16$ a pour discriminant $16-64 = -48 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif. Comme $x^2 > 0$, $S'(x)$ est du signe de $x-4$: négative sur $]0; 4[$, positive sur $]4; +\infty[$.

3. $S(4) = 16 + \frac{128}{4} = 16 + 32 = 48$.

x	0	4	$+\infty$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$			

Pour $x = 4$, $h = \frac{32}{16} = 2$.

Conclusion : la surface de verre est minimale pour un côté de base de 4 dm et une hauteur de 2 dm ; elle vaut alors 48 dm².

4. Le programme teste les valeurs $x = 1 ; 1,01 ; 1,02 ; \dots ; 10$ (pas de 0,01, soit 901 valeurs) et garde celle qui donne la plus petite surface. Il affiche 4.0 48.0, ce qui confirme le résultat. Mais il ne teste qu'un nombre fini de valeurs de $[1 ; 10]$: il ne prouve rien pour les autres réels de $]0 ; +\infty[$, alors que l'étude des variations garantit que 48 est le minimum sur tout l'intervalle.

S3.

1. $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = c = 5$. La tangente en B est horizontale : $f'(2) = 0$. Or $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, donc $12 + 4a + b = 0$, soit $4a + b = -12$. Enfin $f(2) = 8 + 4a + 2b + 5 = -23$ donne $4a + 2b = -36$, soit $2a + b = -18$. En soustrayant : $(4a + b) - (2a + b) = -12 - (-18)$, donc $2a = 6$ et $a = 3$, puis $b = -18 - 6 = -24$.

Conclusion : $a = 3$, $b = -24$, $c = 5$.

2. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x^2 + 2x - 8) = 3(x + 4)(x - 2)$, car -4 et 2 sont racines de $x^2 + 2x - 8$ (somme -2 , produit -8). Le trinôme est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Images : $f(-4) = -64 + 48 + 96 + 5 = 85$ et $f(2) = 8 + 12 - 48 + 5 = -23$.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	85 -23				

3. f' s'annule en 2 en passant de $-$ à $+$.

Conclusion : $f(2) = -23$ est un minimum local, atteint au point $B(2 ; -23)$.

La tangente en A a pour pente $f'(0) = -24$ et passe par $(0 ; 5)$: $y = f'(0)x + f(0)$.

Conclusion : la tangente en A a pour équation $y = -24x + 5$.

4. Calculons $f(-6) = -216 + 108 + 144 + 5 = 41$ et $f(6) = 216 + 108 - 144 + 5 = 185$. Sur $[-6 ; -4]$, f croît de 41 à 85 : elle reste strictement positive, aucune solution. Sur $[-4 ; 2]$, f décroît strictement de 85 à -23 : 0 est atteint une fois. Sur $[2 ; 6]$, f croît strictement de -23 à 185 : 0 est atteint une fois.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a exactement 2 solutions dans $[-6 ; 6]$.

S4.

1. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Le trinôme $x^2 - 1$ est positif à l'extérieur de ses racines -1 et 1 , négatif entre elles. Images : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

2. $(x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2 = x^3-3x+2 = f(x)+1$. La droite d_1 est la tangente horizontale au point d'abscisse 1. Le facteur $(x-1)^2$ est positif, donc $f(x)+1$ est du signe de $x+2$: $f(x)+1 > 0$ pour $x > -2$ avec $x \neq 1$, $f(x)+1 < 0$ pour $x < -2$, et $f(x)+1 = 0$ pour $x = -2$ ou $x = 1$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de d_1 sur $] -2; 1[\cup] 1; +\infty[$, au-dessous sur $] -\infty; -2[$. Les points communs sont $(-2; -1)$, où $\mathcal{C}$ traverse d_1 , et $(1; -1)$, où $\mathcal{C}$ touche d_1 sans la traverser.

3. $(x+1)^2(x-2) = (x^2+2x+1)(x-2) = x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2 = x^3-3x-2 = f(x)-3$. Le facteur $(x+1)^2$ est positif, donc $f(x)-3$ est du signe de $x-2$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessous de d_2 sur $] -\infty; -1[\cup] -1; 2[$, au-dessus sur $] 2; +\infty[$. Les points communs sont $(-1; 3)$, où $\mathcal{C}$ touche d_2 (maximum local), et $(2; 3)$, où elle la traverse.

4. Pour $x \in [-2; 2]$: $x+2 \geq 0$ donc $f(x)+1 \geq 0$, soit $f(x) \geq -1$; et $x-2 \leq 0$ donc $f(x)-3 \leq 0$, soit $f(x) \leq 3$.

Conclusion : pour tout $x \in [-2; 2]$, $-1 \leq f(x) \leq 3$. Cela est cohérent avec la figure : sur $[-2; 2]$, la courbe reste entre d_1 et d_2 .

S5.

1. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$. Sur $[1; 2]$, f est dérivable (donc continue) et strictement croissante, et $0 \in] -1; 7[$: d'après la propriété admise (valeur intermédiaire pour une fonction continue strictement monotone), l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; 2]$, notée α ; comme $f(1) \neq 0$ et $f(2) \neq 0$, $\alpha \in] 1; 2[$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle ne peut prendre la valeur 0 qu'une fois : α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. La variable k parcourt les entiers à partir de 100 et le programme teste $x = \frac{k}{100} = 1; 1,01; 1,02; \dots$ tant que $f(x) < 0$. Il s'arrête au premier x pour lequel $f(x) \geq 0$. La boucle s'arrête car $f(2) = 7 > 0$: au plus tard pour $k = 200$. Comme f est croissante, l'arrêt a lieu pour la première valeur de x située après α . On calcule $f(1,21) \approx -0,0184 < 0$ et $f(1,22) \approx 0,0358 > 0$: le programme s'arrête pour $k = 122$ et affiche 1.21 1.22.

Conclusion : $1,21 < \alpha < 1,22$.

4. Il faut diviser le pas par 10 : on remplace 100 par 1000 dans $k = 100$, $k / 100$ et $(k - 1) / 100$, ce qui donne :

```
k = 1000
while f(k / 1000) < 0:
    k = k + 1
print((k - 1) / 1000, k / 1000)
```

Comme $f(1,213) < 0 < f(1,214)$, le programme affiche 1.213 1.214.

Conclusion : $1,213 < \alpha < 1,214$.

S6.

1. $B(q) = 40q - (2q^3 - 18q^2 + 70q + 20) = -2q^3 + 18q^2 - 30q - 20$. Polynôme dérivable : $B'(q) = -6q^2 + 36q - 30 = -6(q^2 - 6q + 5) = -6(q-1)(q-5)$, car 1 et 5 sont racines de $q^2 - 6q + 5$ (somme 6, produit 5).
2. Le facteur -6 est négatif et $(q-1)(q-5)$ est négatif entre 1 et 5, positif à l'extérieur : $B' < 0$ sur $[0; 1[$, $B' > 0$ sur $] 1; 5[$, $B' < 0$ sur $] 5; 8]$. Images : $B(0) = -20$, $B(1) = -2 + 18 - 30 - 20 = -34$,

$$B(5) = -250 + 450 - 150 - 20 = 30, B(8) = -1024 + 1152 - 240 - 20 = -132.$$

q	0	1	5	8	
$B'(q)$	—	0	+	0	—
$B(q)$	−20	↘ ↗		30	↘ ↗
		−34			−132

3. Le maximum de B sur $[0; 8]$ est $B(5) = 30$.

Conclusion : le bénéfice est maximal pour une production de 5 centaines, soit 500 objets ; il vaut alors 30 milliers d'euros, soit 30 000 euros. (Vérification : $R(5) = 200$ et $C(5) = 170$.)

4. Sur $[0; 1]$, B décroît de -20 à -34 : $B < 0$, aucune solution. Sur $[1; 5]$, B croît strictement de -34 à 30 : une solution α ; comme $B(3) = -2 < 0$ et $B(4) = 20 > 0$, $3 < \alpha < 4$. Sur $[5; 8]$, B décroît strictement de 30 à -132 : une solution β ; comme $B(6) = 16 > 0$ et $B(7) = -34 < 0$, $6 < \beta < 7$.

Conclusion : l'équation $B(q) = 0$ a exactement deux solutions dans $[0; 8]$.

5. D'après le tableau, $B(q) > 0 \iff \alpha < q < \beta$. Le nombre d'objets est $100q$, donc $100\alpha \approx 308,3$ et $100\beta \approx 642,2$. On a $B(3,08) < 0 < B(3,09)$ et $B(6,42) > 0 > B(6,43)$.

Conclusion : l'entreprise réalise un bénéfice strictement positif en produisant entre 309 et 642 objets (inclus).

S7.

1. $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$, donc $g(x) = x^3+3x^2$. g est dérivable sur $[-1; +\infty[$ et $g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$. Sur $] -1; +\infty[$, $x+2 > 0$: $g'(x)$ est du signe de x . Donc g est décroissante sur $[-1; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, avec $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Conclusion : g admet un minimum égal à 0 en $x = 0$, donc $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $(1+x)^3 \geq 1+3x$ pour tout $x \geq -1$.

Avec $x = 0,02$: $1,02^3 \geq 1 + 0,06 = 1,06$. (En fait $1,02^3 = 1,061208$.)

2. h est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2+x+1)$. Le trinôme x^2+x+1 a pour discriminant $1-4 = -3 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $h'(x)$ est du signe de $x-1$: h décroît sur $] -\infty; 1]$ et croît sur $[1; +\infty[$, avec $h(1) = 1 - 4 + 3 = 0$.

Conclusion : le minimum de h sur $\mathbb{R}$ est 0, donc $x^4 - 4x + 3 \geq 0$, c'est-à-dire $x^4 + 3 \geq 4x$ pour tout réel x .

3. Comme $b > 0$, on peut appliquer le résultat à $x = \frac{a}{b}$: $\frac{a^4}{b^4} + 3 \geq \frac{4a}{b}$. On multiplie par $b^4 > 0$: $a^4 + 3b^4 \geq 4ab^3$.

S8.

1. Supposons que $\mathcal{C}_1$ soit la courbe de f' (et donc $\mathcal{C}_2$ celle de f). La courbe $\mathcal{C}_1$ passe de valeurs positives à des valeurs négatives en $x = 0$: f' s'annule en 0 en passant de $+$ à $-$, donc f aurait un maximum local en 0. Or $\mathcal{C}_2$ a au contraire un minimum en 0 (le point $(0; -3)$ est le plus bas de la courbe). Contradiction.

Conclusion : $\mathcal{C}_2$ est la courbe de f' et $\mathcal{C}_1$ celle de f . Cela est cohérent : $\mathcal{C}_1$ a des tangentes horizontales en $x = -1$ et $x = 1$, abscisses où $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des abscisses.

2. $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe en -1 et 1 : $f' > 0$ sur $[-2; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1; 1[$, $f' > 0$ sur $]1; 2]$. On lit sur $\mathcal{C}_1$: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-2 2 -2 2				

3. a) **Faux.** Sur $] -1; 1[$, $\mathcal{C}_2$ est au-dessous de l'axe des abscisses : $f' < 0$. Par exemple $f'(0) = -3$.
b) **Vrai.** Sur $[1; 2]$, $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de l'axe (ou sur l'axe en $x = 1$) : $f' \geq 0$, donc f est croissante.
c) **Vrai.** La pente de la tangente en 2 est $f'(2)$, que l'on lit sur $\mathcal{C}_2$: $f'(2) = 9 > 5$.
d) **Vrai.** D'après le tableau, f croît de -2 à 2 sur $[-2; -1]$, décroît de 2 à -2 sur $[-1; 1]$ et croît de -2 à 2 sur $[1; 2]$: la valeur 0 est atteinte une fois sur chacun des trois intervalles, soit 3 solutions.

S9.

1. f est un polynôme, dérivable sur $[0; 3]$, et $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines 1 et 2, négatif entre elles. Images : $f(0) = 0$, $f(1) = 2 - 9 + 12 = 5$, $f(2) = 16 - 36 + 24 = 4$, $f(3) = 54 - 81 + 36 = 9$.

x	0	1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	5	4	9	

2. $(x-2)^2(2x-1) = (x^2-4x+4)(2x-1) = 2x^3-x^2-8x^2+4x+8x-4 = 2x^3-9x^2+12x-4 = f(x)-4$. De même $(x-1)^2(2x-5) = (x^2-2x+1)(2x-5) = 2x^3-5x^2-4x^2+10x+2x-5 = 2x^3-9x^2+12x-5 = f(x)-5$.

$f(x) = 4 \iff x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$; $f(x) = 5 \iff x = 1$ ou $x = \frac{5}{2}$. Ces quatre valeurs appartiennent à $[0; 3]$.

Conclusion : $f(x) = 4$ a deux solutions, $\frac{1}{2}$ et 2; $f(x) = 5$ a deux solutions, 1 et $\frac{5}{2}$.

3. On compte, intervalle par intervalle, les valeurs de m atteintes : sur $[0; 1]$, f croît de 0 à 5; sur $[1; 2]$, elle décroît de 5 à 4; sur $[2; 3]$, elle croît de 4 à 9.

m	$m < 0$	$0 \leq m < 4$	$m = 4$	$4 < m < 5$	$m = 5$	$5 < m \leq 9$	$m > 9$
Solutions	0	1	2	3	2	1	0

Justification : si $0 \leq m < 4$, seul $[0; 1]$ convient ($f \geq 4$ ailleurs, avec $f = 4$ seulement en 2); si $m = 4$, on trouve $\frac{1}{2}$ et 2 (question 2); si $4 < m < 5$, les trois intervalles conviennent; si $m = 5$, on trouve 1 et $\frac{5}{2}$; si $5 < m \leq 9$, seul $[2; 3]$ convient; si $m < 0$ ou $m > 9$, m n'est pas compris entre le minimum 0 et le maximum 9 de f sur $[0; 3]$.

S10.

1. Pour $q > 0$: $C_M(q) = \frac{q^3 - 6q^2 + 20q + 100}{q} = q^2 - 6q + 20 + \frac{100}{q}$. La fonction C_M est dérivable sur $[1; 10]$ et

$$C'_M(q) = 2q - 6 - \frac{100}{q^2} = \frac{2q^3 - 6q^2 - 100}{q^2} = \frac{2(q-5)(q^2 + 2q + 10)}{q^2},$$

car $(q-5)(q^2+2q+10) = q^3+2q^2+10q-5q^2-10q-50 = q^3-3q^2-50$. Le trinôme $q^2+2q+10$ a pour discriminant $4-40 = -36 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif. Comme $q^2 > 0$, $C'_M(q)$ est du signe de $q-5$: négative sur $[1; 5[$, positive sur $]5; 10]$.

2. Images : $C_M(1) = 1-6+20+100 = 115$, $C_M(5) = 25-30+20+20 = 35$, $C_M(10) = 100-60+20+10 = 70$.

q	1	5	10
$C'_M(q)$	—	0	+
$C_M(q)$	115	35	70

Conclusion : le coût moyen est minimal pour une production de 5 milliers d'objets, soit 5 000 objets ; il vaut alors 35 euros par objet.

3. $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20$, donc $C'(5) = 75 - 60 + 20 = 35 = C_M(5)$. Pour $q > 0$, avec $C_M = \frac{C}{q}$:

$$C'_M(q) = \frac{C'(q) \times q - C(q) \times 1}{q^2} = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}. \text{ Si } C'_M(a) = 0, \text{ alors } aC'(a) = C(a), \text{ soit } C'(a) = \frac{C(a)}{a} = C_M(a).$$

Conclusion : au minimum du coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen.

4. Sur $[1; 5]$, C_M est dérivable (donc continue) et strictement décroissante de 115 à 35 ; $40 \in]35; 115[$: une solution α (propriété admise pour une fonction continue strictement monotone). Comme $C_M(3) = 9 - 18 + 20 + \frac{100}{3} \approx 44,33 > 40 > C_M(4) = 16 - 24 + 20 + 25 = 37$, on a $3 < \alpha < 4$. Sur $]5; 10]$, C_M est strictement croissante de 35 à 70 : une solution β . Comme $C_M(6) = 36 - 36 + 20 + \frac{100}{6} \approx 36,67 < 40 < C_M(7) = 49 - 42 + 20 + \frac{100}{7} \approx 41,29$, on a $6 < \beta < 7$.

Conclusion : l'équation $C_M(q) = 40$ a exactement deux solutions dans $[1; 10]$. D'après le tableau, $C_M(q) \leq 40 \iff \alpha \leq q \leq \beta$: le prix de vente de 40 euros couvre le coût moyen pour une production comprise entre α et β milliers d'objets, avec $3 < \alpha < 4$ et $6 < \beta < 7$ (la calculatrice donne $\alpha \approx 3,475$ et $\beta \approx 6,773$).