

## Variations et courbes représentatives

### Fiche Défi

Nom : \_\_\_\_\_

Date : \_\_\_\_\_

#### Exercice D1 : Extremum local, tangente horizontale et fonctions constantes

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f(a)$  est un maximum local : il existe  $\delta > 0$  tel que  $]a - \delta; a + \delta[ \subset I$  et  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x \in ]a - \delta; a + \delta[$ . Pour  $0 < |h| < \delta$ , on pose  $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

- Donner le signe de  $\tau(h)$  pour  $0 < h < \delta$ , puis pour  $-\delta < h < 0$ .
- On admet que  $\tau(h)$  se rapproche de  $f'(a)$  quand  $h$  se rapproche de 0, aussi bien par valeurs positives que négatives, et qu'une inégalité large est conservée à la limite. En déduire que  $f'(a) = 0$ .
- La réciproque est-elle vraie ? Examiner  $x \mapsto x^3$  en 0. Quelle condition supplémentaire sur  $f'$  garantit un extremum local en  $a$  ?
- On admet que si  $f' = 0$  sur un intervalle, alors  $f$  est constante sur cet intervalle. Soient  $u(x) = \frac{3x-1}{x+2}$  et  $v(x) = -\frac{7}{x+2}$  sur  $] -2; +\infty[$ . Montrer que  $u' = v'$ , en déduire que  $u - v$  est constante et calculer cette constante en évaluant en 0. Confirmer par un calcul direct de  $u(x) - v(x)$ .
- Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et *paire*. Montrer que  $f'$  est impaire, puis que  $f'(0) = 0$ .

#### Exercice D2 : Une famille de fonctions de degré 3

Pour tout réel  $m$ , on définit  $f_m(x) = x^3 + mx^2 + 3x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Calculer  $f'_m(x)$  et montrer que son discriminant vaut  $\Delta = 4(m-3)(m+3)$ .
- On suppose  $-3 \leq m \leq 3$ . Montrer que  $f_m$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $m = 3$ , vérifier que  $f_3(x) = (x+1)^3$  et que  $f'_3$  s'annule sans qu'il y ait d'extremum.
- On suppose  $|m| > 3$ . Montrer que  $f_m$  admet un maximum local et un minimum local.
- Pour  $m = 4$ , déterminer les abscisses  $x_1 < x_2$  des extremums locaux. À la calculatrice, on trouve  $f_4(x_1) \approx 3,11$  et  $f_4(x_2) \approx 0,37$ . Dresser le tableau de variations de  $f_4$  et montrer que l'équation  $f_4(x) = 0$  admet une unique solution (calculer  $f_4(-4)$ ).
- On note  $\mathcal{C}_m$  la courbe représentative de  $f_m$  et  $\Omega$  le point de  $\mathcal{C}_m$  d'abscisse  $t = -\frac{m}{3}$ . Montrer que, pour tout réel  $h$ ,  $f_m(t+h) + f_m(t-h) = 2f_m(t)$ . Que dit ce résultat de la courbe  $\mathcal{C}_m$  ?

#### Exercice D3 : Boîte de conserve de volume maximal

Une boîte de conserve est un cylindre droit fermé, de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  (en décimètres). On dispose de  $6\pi \text{ dm}^2$  de métal : l'aire totale de la boîte (deux disques et la surface latérale) est donc égale à  $6\pi \text{ dm}^2$ .

- Montrer que  $r^2 + rh = 3$ , puis que  $h = \frac{3-r^2}{r}$ . Quel est l'intervalle des valeurs possibles de  $r$  ?
- Montrer que le volume de la boîte est  $V(r) = \pi(3r - r^3)$ .
- Étudier les variations de  $V$  sur  $[0; \sqrt{3}]$ .
- Pour quel rayon le volume est-il maximal ? Donner alors la hauteur, le volume maximal (valeur exacte puis arrondie au dixième de litre) et comparer  $h$  et  $2r$ .
- Montrer que  $V(1) - V(r) = \pi(r-1)^2(r+2)$  et retrouver ainsi le résultat de la question 4.

*Rappels : aire d'un disque  $\pi r^2$  ; aire latérale d'un cylindre  $2\pi rh$  ; volume d'un cylindre  $\pi r^2 h$  ;  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre}$ .*

#### Exercice D4 : Concentration d'un médicament (type bac)

Un médicament est pris à l'instant  $t = 0$ . La concentration de principe actif dans le sang, en mg/L, est modélisée,  $t$  heures après la prise ( $0 \leq t \leq 12$ ), par  $c(t) = \frac{20t}{t^2 + 4}$ .

1. Montrer que  $c'(t) = \frac{20(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$  et dresser le tableau de variations de  $c$  sur  $[0; 12]$ .
2. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est sa valeur ?
3. Le médicament est efficace tant que la concentration est au moins 4 mg/L. Montrer que  $c(t) \geq 4 \iff t^2 - 5t + 4 \leq 0$ , puis déterminer la durée d'efficacité.
4. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe de  $c$  au point d'abscisse 0, puis montrer que  $5t - c(t) = \frac{5t^3}{t^2+4}$ . En déduire la position de la courbe par rapport à  $T$ .
5. Une seconde prise est prévue quand la concentration redevient inférieure à 2 mg/L. Montrer que l'équation  $c(t) = 2$  a une unique solution dans  $[2; 12]$ , la calculer exactement, et donner l'instant de la seconde prise en heures et minutes.
6. On exécute le programme suivant.

```
def c(t):
    return 20 * t / (t ** 2 + 4)

n = 0
for k in range(0, 1201):
    if c(k / 100) >= 4:
        n = n + 1
print(n)
```

Que compte ce programme ? Il affiche 301 : quel lien avec la question 3 ?

### Exercice D5 : Le point d'une parabole le plus proche d'un point donné

Dans un repère orthonormé, soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y = x^2$  et  $A(0; a)$  un point de l'axe des ordonnées. Pour tout réel  $x$ , on note  $M$  le point  $(x; x^2)$  de  $\mathcal{P}$ .

1. On prend  $a = 2$ . Montrer que  $AM^2 = g(x)$  avec  $g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ . Pourquoi minimiser  $AM$  revient-il à minimiser  $AM^2$  ?
2. Montrer que  $g$  est paire, étudier ses variations sur  $[0; +\infty[$  et en déduire la distance minimale de  $A$  à  $\mathcal{P}$  et les points où elle est atteinte.
3. Cas général : montrer que  $AM^2 = x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2$  et que sa dérivée est  $2x(2x^2 + 1 - 2a)$ . Discuter selon  $a$  la valeur de la distance minimale  $AM$  et les points  $M$  correspondants (distinguer  $a \leq \frac{1}{2}$  et  $a > \frac{1}{2}$ ).
4. Pour  $a = 1$ , la distance minimale de  $A$  à  $\mathcal{P}$  est-elle atteinte au sommet de la parabole ?

### Exercice D6 : Maximum d'un produit

1. Étudier les variations de  $g(x) = x^2(1-x)$  sur  $[0; 1]$  et montrer que  $g(x) \leq \frac{4}{27}$ .
2. Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs, de somme  $s > 0$ . En posant  $x = su$ , montrer que  $x^2y \leq \frac{4s^3}{27}$ . Pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$  y a-t-il égalité ?
3. Un transporteur n'accepte que les colis en forme de pavé droit à base carrée de côté  $x$  et de hauteur  $y$  (en cm) vérifiant  $x + y \leq 90$ . Quel est le volume maximal d'un colis accepté ? Donner les dimensions correspondantes.
4. Vérifier que  $\frac{4}{27} - x^2(1-x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$  et retrouver ainsi l'inégalité de la question 1, ainsi que son cas d'égalité.

### Exercice D7 : Méthode de Newton pour $\sqrt{3}$

Soit  $f(x) = x^2 - 3$  sur  $]0; +\infty[$ . On définit la suite  $(x_n)$  par  $x_0 = 2$  et, pour tout  $n$ ,  $x_{n+1}$  est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $x_n$ .

1. Déterminer l'équation de la tangente en  $x_0 = 2$  et calculer  $x_1$ .

2. Soit  $a > 0$ . Montrer que la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\frac{1}{2} \left( a + \frac{3}{a} \right)$ , qui est strictement positif. En déduire que  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right)$  pour tout  $n$  et que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
3. On exécute le programme suivant.

```
x = 2.0
for k in range(1, 5):
    x = (x + 3 / x) / 2
    print(k, x)
```

Quelles valeurs affiche-t-il ? Les comparer à  $\sqrt{3}$ .

4. Montrer que, pour tout  $n$ ,  $x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(x_n - \sqrt{3})^2}{2x_n}$ . En déduire que  $x_n \geq \sqrt{3}$  pour tout  $n \geq 1$ , puis que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.
5. On pose  $e_n = x_n - \sqrt{3}$ . Montrer que  $e_1 < 0,02$ , puis que  $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{3,46}$  pour  $n \geq 1$ . En déduire que  $x_3$  approche  $\sqrt{3}$  à  $10^{-8}$  près.

On utilisera que  $1,73^2 < 3$ , donc  $\sqrt{3} > 1,73$ .